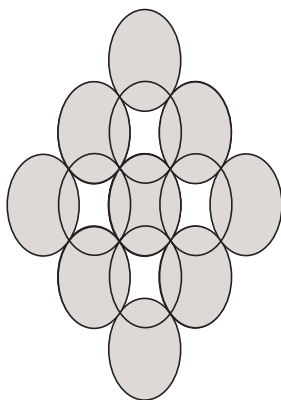


پکشِ اَبَرچَگال از بیضی گون‌ها

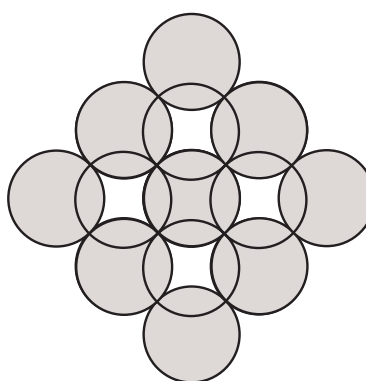
امیر آقامحمدی

۱۳۸۳

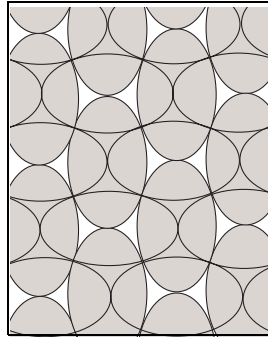
مسئله‌ی پکشِ ذرات هم‌واره مورد توجه ریاضی‌پیشه‌ها و فیزیک‌پیشه‌ها بود. اخیراً این موضوع مورد توجه شیمی‌پیشه‌ها و متخصصین علم مواد نیز قرار گرفته است. کیپلر^(۱) حدود ۴۰۰ سال پیش این سؤال را مطرح کرد که چه طور می‌توان فضا را با تعدادی کره پُر کرد، به طوری که نسبت حجم فضای اشغال شده توسط کره‌ها به حجم کل، نسبتی که آن را پکش می‌نامند، بیشینه باشد. کیپلر آرایش خاصی از چیدن کره‌ها را به عنوان جواب مطرح کرد (شکل ۱ - الف). در این آرایش خاص، پکش $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74$ است. اثبات این حدس چند قرن طول کشید و بالاخره توسط هیلز^(۲) همین اواخر اثبات شد. هیلز در هشت مقاله که مرجع [۲] اولین آن‌ها بود این حدس را ثابت کرد. در این آرایش هر کره با ۱۲ کره دیگر در تماس است: هر کره در لایه‌ی خود با ۴ کره در تماس است، علاوه بر این با ۴ کره از لایه‌ی زیری و با ۴ کره از لایه‌ی بالایی در تماس است. اگر تعدادی کره را به صورت تصادفی روی هم بریزیم پکش بیشینه حدود ۰.۶۸ است.



شکل ۱ - ب



شکل ۱ - الف



شکل ۲

با تبدیلی خطی می‌توان مسئله‌ی کره‌ها را به مسئله‌ی مشابهی برای بیضی گون‌ها تبدیل کرد (شکل ۱ - ب). با یک تبدیل خطی کره به بیضی گون تبدیل می‌شود و پکش ناورد می‌ماند. پس اگر بیضی گون‌ها را با همان آرایش پکش بیشینه‌ی کره‌ها بچینیم پکش همان 0.74 می‌شود. بدیهی است که در این آرایش محور اصلی تمام بیضی گون‌ها موازی است. به عبارت دیگر پکش بیشینه برای بیضی گون‌هایی با محورهای اصلی موازی، 0.74 است. تا کنون تصور بر این بوده که پکش بیشینه برای بیضی گون همان 0.74 است. بیضی گون‌هایی با نیم‌قطرهای اصلی a ، b ، و c و با نسبت‌های $\alpha := b/a$ و $\beta := c/a$ در نظر بگیرید.

گروهی در دانش‌گاو پرینستون³ شبیه‌سازی ای را برای تعدادی بیضی گون انجام دادند⁴. آن‌ها با کمال تعجب مشاهده کردند که پکش بیشینه‌ی تصادفی بیضی گون‌ها برای $\alpha \approx 1.25$ و $\beta \approx 0.8$ ، 0.735 است. این مقدار از پکش بیشینه‌ی تصادفی کره‌ها یعنی 0.68 خیلی بیش‌تر است، و تقریباً برابر با 0.74 است. معنی این نتیجه‌ی عجیب می‌تواند این باشد که شاید بتوان بیضی گون‌ها را با آرایش دیگری چید به طوری که پکش این آرایش بیش‌تر از 0.74 باشد. این گروه با آرایشی خاص به پکش 0.77 رسیدند. در این آرایش، که در شکل ۲ نشان داده شده، هر بیضی گون با 14 بیضی گون دیگر در تماس است: هر بیضی گون در لایه‌ی خود با 6 بیضی گون در تماس است، علاوه بر این با 4 بیضی گون از لایه‌ی زیری و 4 بیضی گون از لایه‌ی بالایی در تماس است. در ضمن محورهای اصلی همه‌ی بیضی گون‌ها نیز موازی نیستند، و بنا بر این با هیچ تبدیل خطی‌ای نمی‌توان این آرایش از بیضی گون‌ها را به آرایشی از کره‌ها که پکش بیشینه دارد، تبدیل کرد. اثباتی نیز وجود ندارد که نشان دهد این مقدار پکش بیشینه‌ی بیضی گون‌ها است. در واقع 0.77، یک حد پایین برای بیشینه‌ی پکش بیضی گون‌ها است. شاید بتوان حدسی مشابه حدس کپلر برای پکش بیشینه‌ی بیضی گون‌ها مطرح کرد.

¹) Kepler; ²) Hales T. C.; An overview of the Kepler conjecture, math.MG/9811071;

³) Princeton University, ⁴) Donev A., Stillinger F. H., Chaikin P. M., & Torquato S.; Superdense Crystal packing of ellipsoids, cond-mat/0403286, to appear in

Physical Review Letters (2004).