

مقدمه‌ای بر معادله‌های تفاضلی¹

امیر آقامحمدی

چکیده— در این مقاله ابتدا معادله‌های تفاضلی معرفی می‌شود و پس از آن با حل این گونه معادله‌ها آشنا می‌شویم.

۱ مقدمه

در دوره‌ی رسمی‌ی آموزش فیزیک دانش‌جوها با معادله‌های دیفرانسیل آشنا می‌شوند. یک درس با همین عنوان در دوره‌ی کارشناسی وجود دارد. در درس‌های مختلف نیز به طور پراکنده با معادله‌های دیفرانسیلی مثل معادله‌ی نیوتن، معادله‌ی شرودینگر در یک بُعد، و گاهی با معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای مثل معادله‌ی شرودینگر در دو یا سه بُعد، معادله‌ی لاپلاس، معادله‌ی موج، و ... آشنا می‌شوند. اما معادله‌های تفاضلی به طور رسمی در هیچ درسی مورد بحث قرار نمی‌گیرد. در این مقاله ابتدا این نوع معادله‌ها معرفی می‌شوند. سپس معادله‌های تفاضلی‌ی خطی‌ی رتبه‌ی یک در حالت کلی حل می‌شوند. پس از آن معادله‌های تفاضلی‌ی خطی‌ی رتبه‌ی N با ضرایب ثابت نیز حل می‌شوند. در آخر چند مثال از مسائل فیزیک که معادله‌های تفاضلی در آن‌ها ظاهر می‌شود، معرفی و حل می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dx}{dt} = 1. \quad (1)$$

در این معادله t متغیری پیوسته است. این معادله را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت،

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 1. \quad (2)$$

اگر t متغیری گسسته باشد و تنها بتواند اعداد صحیح اختیار کند، ممکن است معادله‌ای شبیه معادله‌ی زیر داشته باشیم،

$$x_{t+1} - x_t = 1. \quad (3)$$

difference equations¹

جواب معادله‌ی دیفرانسیل (1) را با داشتن یک مقدار اولیه مثلاً $x(0)$ به سادگی می‌توانیم به دست آوریم،

$$x(t) = t + x(0). \quad (4)$$

معادله‌ی تفاضلی (3) را نیز با داشتن مثلاً x_0 می‌توانیم حل کنیم،

$$x_t = t + x_0. \quad (5)$$

توجه دارید که در (4) متغیری پیوسته و در (5) متغیری گسسته است. در این مثال خاص جواب معادله‌ی دیفرانسیل (1) و جواب معادله‌ی تفاضلی (3) شبیه هم است، ولی در حالت کلی این طور نیست. البته توجه داریم که در معادله‌ی (1) t اعداد حقیقی و در معادله‌ی تفاضلی (3) t اعداد صحیح را اختیار می‌کند. یک معادله‌ی تفاضلی برای x_n که n اعداد صحیح اختیار می‌کند در نظر بگیرید، مثلاً

$$x_{N+n} + p_{N-1}(n)x_{N+n-1} + \dots + p_0(n)x_n = q(n). \quad (6)$$

رتبه‌ی یک معادله‌ی تفاضلی برابر است با اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین اندیسی n برای متغیر x_n که در معادله ظاهر می‌شود. رتبه‌ی معادله‌ی (6) برابر است با N . معادله‌ی (3) یک معادله‌ی تفاضلی رتبه یک است.

همان طور که معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب ثابت حل ساده‌تری دارند، حل معادله‌های تفاضلی با ضرایب ثابت نیز ساده‌تر است. حل معادله‌های تفاضلی غیرخطی نیز مشابه حل معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی علی‌الاصول پیچیده‌تر است.

۲ معادله‌های تفاضلی

۱.۲ معادله‌های تفاضلی رتبه یک با ضرایب ثابت

مثال 1. معادله‌ی تفاضلی‌ی هم‌گن زیر را در نظر بگیرید.

$$x_{n+1} = p x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

p یک ثابت است. برای به دست آوردن جواب کلی این معادله باید یکی از x_k ها، مثلاً x_0 را داشت.

$$\begin{aligned}
x_1 &= p x_0 \\
x_2 &= p x_1 = p^2 x_0 \\
x_3 &= p x_2 = p^3 x_0 \\
&\dots \\
x_n &= p x_{n-1} = p^n x_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

همان طور که جواب عمومی معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب ثابت، را به شکل $x(t) = Ce^{pt}$ (یا در واقع $(e^p)^t$) می‌گیریم، جواب عمومی معادله‌های تفاضلی با ضرایب ثابت، را نیز $x_n = CZ^n$ می‌گیریم². در این جا C یک ثابت است که با استفاده از شرط مرزی تعیین می‌شود. با جاگذاری این نهاده برای جواب در (5)، مقدار Z نیز به دست می‌آید.

$$CZ^{n+1} = p CZ^n \Rightarrow Z = p. \tag{9}$$

با داشتن مقدار اولیه، $C = x_0$ می‌شود. به این ترتیب $x_n = x_0 p^n$ است. مثال 2) حالا بیاییم به معادله‌ی (7) یک جمله اضافه کنیم که معادله‌ی تفاضلی غیرهم‌گن شود.

$$x_{n+1} = p x_n + \beta. \tag{10}$$

باز هم همان کاری که در حل معادله‌ی دیفرانسیل خطی‌ی غیر هم‌گن می‌کردیم، انجام می‌دهیم. یعنی ابتدا جواب عمومی معادله‌ی هم‌گن و جوابی خاص برای معادله‌ی تفاضلی غیرهم‌گن را به دست می‌آوریم. جمع جواب عمومی و جواب خاص که در شرط مرزی صدق کند، جواب است. جواب بخش هم‌گن را که قبلاً به دست آوردیم. به ازای $p \neq 1$ جواب خاص را می‌توانیم $x_n = D$ که D مقداری ثابت است، بگیریم. با جاگذاری این مقدار در معادله‌ی (10)، D به دست می‌آید.

$$D = pD + \beta \Rightarrow D = \frac{\beta}{1-p}. \tag{11}$$

جواب کلی‌ی معادله‌ی (10) جمع جواب‌های عمومی هم‌گن و جواب خاص است. برای به دست آوردن ضریب ثابت جواب هم‌گن جواب از شرط اولیه استفاده می‌کنیم.

$$x_n = Cp^n + \frac{\beta}{1-p} \Rightarrow x_n = x_0 p^n + \frac{\beta(1-p^n)}{1-p}. \tag{12}$$

² ضرایب در معادله‌ی (7) مستقل از n هستند و اگر این معادله را به شکل عمل‌گری $\mathcal{F}x_n = 0$ بنویسیم، واضح است که عمل‌گر \mathcal{F} با عمل‌گر انتقال، \mathcal{P} ($\mathcal{P}x_n = x_{n+1}$) جابه‌جایی است، پس می‌توانیم ویژه‌تابع مشترک برای آن‌ها بیابیم. CZ^n ویژه‌تابع عمل‌گر انتقال است.

البته با محاسبه‌ی مستقیم و حل معادله‌ی (10) به عنوان یک معادله‌ی بازگشتی نیز می‌شد همین جواب را به دست آورد. جواب خاصی که برای $p \neq 1$ به دست آوردیم، برای $p = 1$ به درد نمی‌خورد. به ازای $p = 1$ معادله‌ی (10) به شکلی $x_{n+1} - x_n = \beta$ که یک تفاضل کامل (شبه مشتق در حالت پیوسته) است، در می‌آید. جواب این معادله (مشابه حالت پیوسته) $x_n = x_0 + \beta n$ است. دقت کنید اگر حد $p \rightarrow 1$ جواب (12) را نیز حساب کنیم به همین جواب می‌رسیم.

۲.۲ معادله‌های تفاضلی‌ی رتبه یک با ضرایب غیرثابت

معادله‌ی تفاضلی‌ی هم‌گن زیر را در نظر بگیرید.

$$x_{n+1} = (n+1)x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

جواب این معادله را به صورت بازگشتی می‌توان به دست آورد. در این صورت داریم

$$x_n = x_0 n!. \quad (14)$$

ساده‌ترین تعمیم این معادله معادله‌ی تفاضلی‌ی هم‌گن زیر است.

$$x_{n+1} = p(n)x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

که این معادله را نیز به صورت بازگشتی می‌توان حل کرد. در این صورت جواب این معادله می‌شود

$$x_n = x_0 \prod_{j=0}^{n-1} p(j). \quad (16)$$

کلی‌ترین معادله‌ی تفاضلی‌ی خطی‌ی غیرهم‌گن عبارت است از

$$x_{n+1} = p(n)x_n + q(n). \quad (17)$$

با یک تغییر متغیر می‌توان این معادله را به یک تفاضل کامل رتبه‌ی یک تبدیل کرد. برای این کار معادله‌ی (17) را در $\prod_{j=0}^{n-1} p^{-1}(j)$ ضرب می‌کنیم. در این صورت داریم،

$$\frac{x_{n+1}}{\prod_{j=0}^n p(j)} = \frac{x_n}{\prod_{j=0}^{n-1} p(j)} + \frac{q(n)}{\prod_{j=0}^n p(j)} \quad (18)$$

که با تعریف

$$y_n := \frac{x_n}{\prod_{j=0}^{n-1} p(j)}, \quad Q(n) = \frac{q(n)}{\prod_{j=0}^n p(j)}, \quad (19)$$

تبدیل می‌شود به

$$y_{n+1} = y_n + Q(n). \quad (20)$$

جواب این معادله را به صورت بازگشتی می‌توان به دست آورد.

$$y_n = y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} Q(j). \quad (21)$$

از این جا x_n را به دست می‌آوریم.

$$x_n = \left[\prod_{s=0}^{n-1} p(s) \right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{q(k)}{\prod_{j=0}^k p(j)} + x_0 \right]. \quad (22)$$

معادله‌های تفاضلی غیرخطی علی‌الاصول به راحتی قابل حل نیستند و روش استاندارد برای حل آن‌ها وجود ندارد. البته در مواردی ممکن است با یک تغییر متغیر مسئله را خطی کرد. مثلاً در مثال

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad (23)$$

با تغییر متغیر $y_n := \ln x_n$ ، معادله‌ای که برای y_n به دست می‌آید خطی است.

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad \Rightarrow \quad y_n = 2^n y_0. \quad (24)$$

که از این جا $x_n = x_0^{(2^n)}$ در معادله غیرخطی

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \quad (25)$$

تغییر متغیر $x_n = \cos y_n$ معادله (25) را تبدیل به معادله‌ای خطی برای y_n می‌کند. برای $|x_n| \leq 1$ ، y_n ‌ها حقیقی و برای $|x_n| \geq 1$ ، موهومی هستند. البته همان‌طور که ذکر شد در حالت کلی روشی برای حل معادله‌های غیرخطی وجود ندارد.

۳.۲ معادله‌ی تفاضلی‌ی رتبه‌ی N با ضرایب ثابت

کلی‌ترین معادله‌ی تفاضلی‌ی خطی‌ی از رتبه‌ی N به صورت زیر است.

$$x_{N+n} + p_{N-1}(n)x_{N+n-1} + \dots + p_0(n)x_n = q(n). \quad (26)$$

فرض کنید تمام ضرایب p_i ، و q مستقل از n باشند، در این صورت

$$x_{N+n} + p_{N-1}x_{N+n-1} + \dots + p_0x_n = q, \quad (27)$$

کلی‌ترین معادله‌ی تفاضلی‌ی خطی‌ی از رتبه‌ی N با ضرایب ثابت است. برای حل این معادله ابتدا جواب معادله‌ی هم‌گن را به دست می‌آوریم. سپس با اضافه کردن جوابی خاص به آن جواب کلی به دست می‌آید. با استفاده از شرط‌های اولیه ضرایب ثابتی که در جواب کلی وجود دارند به دست می‌آید. برای آن‌که جواب معادله‌ی تفاضلی به طور یک‌تا تعیین شود باید به اندازه‌ی رتبه‌ی معادله‌ی تفاضلی ثابت اولیه یا مرزی داشته باشیم. نهاده‌ی $x_n = CZ^n$ را به عنوان جواب بخش هم‌گن در نظر می‌گیریم. با جاگذاری این جواب در معادله‌ی (27) به معادله‌ی زیر برای Z می‌رسیم.

$$Z^N + p_{N-1}Z^{N-1} + \dots + p_0 = 0. \quad (28)$$

این معادله N جواب برای Z می‌دهد. چون این معادله خطی است، جواب معادله‌ی هم‌گن ترکیبی خطی از این جواب‌هاست.

$$x_n = C_1Z_1^n + C_2Z_2^n + \dots + C_NZ_N^n. \quad (29)$$

اگر دو تا از جواب‌ها مثلاً Z_1 و Z_2 یکی باشند، به جای $C_1Z_1^n + C_2Z_2^n$ جواب به صورت $(D_1 + D_2n)Z_1^n$ است. و یا اگر ریشه چندگانه از رتبه‌ی k باشد جواب به صورت $(D_1 + D_2n + \dots + D_k n^{k-1})Z_1^n$ است. یک جواب خاص برای معادله‌ی (27)، $x_n^{(p)} = D$ است، که ثابت D با جاگذاری این جواب در معادله‌ی (27) به دست می‌آید.

$$x_n^{(p)} = \frac{q}{1 + p_{N-1} + \dots + p_0}. \quad (30)$$

این جواب در صورتی قابل قبول است که

$$1 + p_{N-1} + \dots + p_0 \neq 0. \quad (31)$$

در صورتی که جمع ضرایب صفر باشند، جواب خاص معادله‌ی (27) را به صورت $x_n^{(p)} = D_1n$ می‌گیریم. در این صورت

$$D_1 [(N + n) + p_{N-1}(N + n - 1) + \dots + p_0 n] = q,$$

$$\Rightarrow x_n^{(p)} = \frac{q}{N + p_{N-1}(N - 1) \dots + p_1} n. \quad (32)$$

باز هم در صورتی این جواب قابل قبول است که مخرج کسر در جواب بالا غیر صفر باشد. در صورتی که این مقدار هم صفر شد جواب خاص را به صورت $x_n^{(p)} = D_2 n^2$ می گیریم. در صورتی که این جواب هم قابل قبول نبود به همین صورت ادامه می دهیم. به این ترتیب حتماً یک جواب می توان به دست آورد. (چرا؟)

۳ تابع مولد

یک راه که گاهی با استفاده از آن می توان معادله های تفاضلی را حل کرد استفاده از تابع مولد است. در این روش تابعی به نام تابع مولد تعریف می شود. تابع مولد بیش تر برای مواردی مفید است که معادله با ضرایب ثابت باشد. در این صورت معادله ی حاکم بر تابع مولد جبری می شود.

مثال 3- معادله ی تفاضلی ی زیر با شرط اولیه ی $x_0 = \alpha$ و $x_1 = \beta$ را در نظر بگیرید.

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \quad (33)$$

تابع مولد $G(Z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n. \quad (34)$$

معادله ی (33) را در Z^n ضرب و روی n جمع می بندیم.

$$a \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} Z^n + b \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} Z^n + c \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n = 0. \quad (35)$$

این معادله را بر حسب $G(Z)$ می توانیم بنویسیم.

$$aZ^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} Z^{n+2} + bZ^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} Z^{n+1} + c \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n = 0,$$

$$aZ^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} x_n Z^n + bZ^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} x_n Z^n + c \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n = 0,$$

$$aZ^{-2}(G(Z) - Zx_1 - x_0) + bZ^{-1}(G(Z) - x_0) + cG(Z) = 0. \quad (36)$$

از این جا $G(Z)$ به دست می آید.

$$G(Z) = \frac{a(\alpha + \beta Z) + \alpha bZ}{cZ^2 + bZ + a}. \quad (37)$$

اگر $G(Z)$ را حول $Z = 0$ بسط تیلور دهیم ضرایب بسط x_n ها هستند. گاهی با استفاده از تابع مولد می توانیم معادله ی تفاضلی با ضرایب غیر ثابت را هم حل کنیم. در این موارد به یک معادله ی دیفرانسیل برای $G(Z)$ می رسیم. مثال 4) معادله ی تفاضلی ی زیر با شرط $x_0 = 1$ را در نظر بگیرید.

$$(n+1)x_{n+1} + nx_n + 2x_n = 0. \quad (38)$$

تابع مولد را به صورت زیر می گیریم،

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n. \quad (39)$$

معادله ی (38) را در Z^n ضرب و روی n جمع می بندیم. با این کار به معادله ی دیفرانسیلی برای $G(Z)$ می رسیم.

$$\frac{dG(Z)}{dZ} + Z \frac{dG(Z)}{dZ} + 2G(Z) = 0, \Rightarrow \frac{dG(Z)}{dZ} = -\frac{2}{1+Z}G(Z). \quad (40)$$

توجه داریم که

$$\frac{dG(Z)}{dZ} = \sum_{n=0}^{\infty} nx_n Z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x_{n+1} Z^n. \quad (41)$$

شرط اولیه ی $x_0 = 1$ منجر به شرط اولیه ی $G(0) = 1$ می شود. از این معادله به سادگی $G(Z)$ به دست می آید.

$$G(Z) = \frac{G(0)}{(1+Z)^2} = \frac{1}{(1+Z)^2}. \quad (42)$$

اگر تابع مولد $G(Z)$ را بسط تیلور دهیم ضرایب بسط x_n ها هستند.

$$G(Z) = \frac{1}{(1+Z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) Z^n, \Rightarrow x_n = (-1)^n (n+1). \quad (43)$$

۴ چند مثال

مثال 5. بیابید چند جمله‌ای $I_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{k=n} k$ را محاسبه کنیم. به سادگی می‌توانیم معادله‌ی تفاضلی‌ای که I_n در آن صدق می‌کند را به دست آوریم.

$$I_{n+1}^{(1)} - I_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n+1} k - \sum_{k=0}^n k = n + 1. \quad (44)$$

جمع ضرایب I_l ها در سمت چپ (44) صفر است و سمت چپ یک تفاضل کامل رتبه یک است. سمت راست نسبت به n خطی است، پس $I_n^{(1)} = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ را به عنوان جواب می‌گیریم. شرط $I_0^{(1)} = 0$ ، نتیجه می‌دهد، $\gamma = 0$. اگر جوابی که حدس زده‌ایم را در معادله‌ی (44) جاگذاری کنیم، ضرایب α و β به دست می‌آیند.

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) - \alpha n^2 - \beta n = n + 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}. \quad (45)$$

که از این جا نتیجه می‌شود $I_n^{(1)} = n(n+1)/2$.
مثال 6. بیابید چند جمله‌ای $I_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n k^2$ را محاسبه کنیم. در این صورت $I_n^{(2)}$ در معادله‌ی تفاضلی‌ی زیر صدق می‌کند.

$$I_{n+1}^{(2)} - I_n^{(2)} = (n+1)^2. \quad (46)$$

حدس $I_n^{(2)} = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$ را به عنوان جواب می‌گیریم. شرط $I_0^{(2)} = 0$ ، نتیجه می‌دهد، $\delta = 0$. با جاگذاری این حدس به عنوان جواب در معادله‌ی (46)، ضرایب α و β و γ به دست می‌آیند. جوابی که به این ترتیب به دست می‌آید عبارت است از

$$I_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (47)$$

چند جمله‌ای $I_n^{(3)} = \sum_{k=0}^n k^3$ را نیز به همین ترتیب می‌توانیم به دست آوریم.

$$I_n^{(3)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (48)$$

مثال 7. فردی به اندازه‌ی C_0 از بانک وام می‌گیرد. بهره‌ی وام را α و تعداد اقساط را N می‌گیریم. می‌خواهیم ببینیم او در هر قسط چه مبلغی (مثلاً q) باید پرداخت کند. پس از یک قسط او به اندازه‌ی $C_1 = rC_0 - q$ ، $(r := 1 + \alpha)$ بدهکار است و پس از n قسط به اندازه‌ی C_n بدهکار است.

$$C_n = rC_{n-1} - q. \quad (49)$$

جواب بخش هم گن Ar^n و جواب خاص $q/(r-1)$ است.

$$C_n = Ar^n + \frac{q}{r-1}. \quad (50)$$

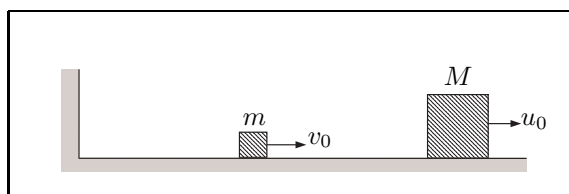
با استفاده از شرط اولیه C_0 ، نتیجه می شود

$$C_n = C_0 r^n - \frac{q(r^n - 1)}{r - 1}. \quad (51)$$

برای آن که مقدار قسط q را به دست آوریم باید از شرط مرزی $C_N = 0$ استفاده کنیم،

$$q = \frac{C_0(r-1)r^N}{r^N - 1} = \frac{C_0\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N - 1}. \quad (52)$$

مثال 8) ذره ای به جرم m با سرعت v_0 به سمت ذره دیگری به جرم M که با سرعت u_0 در حرکت است پرتاب می شود ($u_0 < v_0$). برخورد بین دو ذره را کش سان بگیرد. جرم m پس از برخورد با M بر می گردد و با دیوار برخورد می کند. برخورد m با دیوار را نیز کش سان می گیریم. می خواهیم سرعت نهایی جرم های m و M و هم چنین تعداد برخورد آن ها با هم را به دست آوریم.



چون برخوردها کش سان هستند انرژی پایسته است و چون در برخورد دو جرم، نیروی خارجی نداریم، تکانه ی کل پایسته است. در برخورد با دیوار فقط جهت تکانه ی ذره عوض می شود.

اندازه ی سرعت جرم m قبل از $k+1$ امین برخوردش را v_k و سرعت جرم M قبل از $k+1$ امین برخورد را u_k می گیریم. بقای تکانه و انرژی جنبشی می دهد،

$$mv_k + Mu_k = -mv_{k+1} + Mu_{k+1}$$

$$\frac{mv_k^2}{2} + \frac{Mu_k^2}{2} = \frac{mv_{k+1}^2}{2} + \frac{Mu_{k+1}^2}{2}. \quad (53)$$

با استفاده از این روابط می‌توانیم u_{k+1} و v_{k+1} را بر حسب u_k و v_k به دست آوریم.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{2m}{M+m}v_k + \frac{M-m}{M+m}u_k \\ v_{k+1} &= \frac{M-m}{M+m}v_k - \frac{2M}{M+m}u_k. \end{aligned} \quad (54)$$

برای حل این معادله‌ها کافی است که حدس‌های $u_k = BZ^k$ و $v_k = CZ^k$ را به عنوان جواب در (54) جاگذاری کنیم.

$$\begin{aligned} BZ &= \frac{2m}{M+m}C + \frac{M-m}{M+m}B \\ CZ &= \frac{M-m}{M+m}C - \frac{2M}{M+m}B \\ \Rightarrow \frac{B}{C} &= \frac{2m/(M+m)}{Z - (M-m)/(M+m)} = \frac{Z - (M-m)/(M+m)}{-2M/(M+m)}. \end{aligned} \quad (55)$$

با حل این معادله Z و B/C به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} Z &= e^{\pm i\theta}, \quad \cos \theta := \frac{M-m}{M+m} \\ \frac{B}{C} &= \mp i\sqrt{\frac{m}{M}}. \end{aligned} \quad (56)$$

u_k و v_k عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} v_k &= Ce^{ik\theta} + C^*e^{-ik\theta} \\ u_k &= \sqrt{\frac{m}{M}}(-iCe^{ik\theta} + iC^*e^{-ik\theta}). \end{aligned} \quad (57)$$

در این جا حقیقی بودن سرعت‌ها منجر به این می‌شود که C و C^* مزدوج مختلط هم باشند. یک راه دیگر برای به دست آوردن همین نتیجه تعریف

$$S_k := v_k + i\sqrt{\frac{M}{m}}u_k, \quad (58)$$

است. با استفاده از (54) به راحتی می‌توان نشان داد

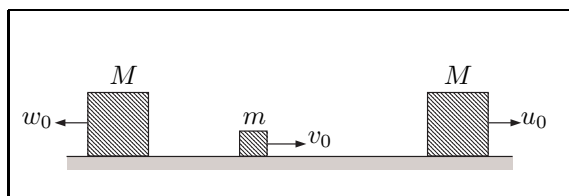
$$S_{k+1} = e^{i\theta}S_k = \dots = e^{ik\theta}S_0, \quad (59)$$

که θ همان تعریف (56) را دارد. فرض کنید $m/M = 0.01$ و $u_0 = 0$. می‌خواهیم تعداد برخوردها بین دو جرم را به دست آوریم. با استفاده از پارامترهای داده‌شده $\theta = 11.4^\circ$. شرط آن که دیگر برخوردی صورت نگیرد آن است که،

$$v_k \leq u_k, \Rightarrow \cot(k\theta) \leq \sqrt{m/M} = 0.1 \Rightarrow k\theta \geq 84^\circ \quad (60)$$

از این جا تعداد برخوردها $k = 7$ به دست می‌آید.

مثال 9) همان مثال قبل را در نظر بگیرید ولی با این تفاوت که به جای دیوار ذره دیگری با جرم M قرار دارد که با سرعت اولیه w_0 به سمت چپ می‌رود. کماکان برخوردها را کش‌سان بگیرید.



اندازه‌ی سرعت جرم m قبل از $k+1$ امین برخوردش را v_k و سرعت دو جرم M قبل از $k+1$ امین برخورد را u_k و w_{k+1} می‌گیریم. با استفاده از پایستگی انرژی و تکانه در هر یک از برخوردها به روابط زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{2m}{M+m}v_{2k} + \frac{M-m}{M+m}u_k \\ v_{2k+1} &= \frac{M-m}{M+m}v_{2k} - \frac{2M}{M+m}u_k. \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= \frac{2m}{M+m}v_{2k+1} + \frac{M-m}{M+m}w_k \\ v_{2k+2} &= \frac{M-m}{M+m}v_{2k+1} - \frac{2M}{M+m}w_k. \end{aligned} \quad (62)$$

در این جا یک دسته معادله‌ی تفاضلی جفت شده داریم. این معادله‌ها نیز به همان روش قبلی و با جاگذاری $v_k = CZ^k$ و $u_k = BZ^{2k}$ و $w_k = DZ^{2k+1}$ می‌توانیم حل کنیم. با حل آن معادله‌ها Z و B/C و D/C به دست می‌آیند.

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n), \quad x_0 = x_{N+1} = 0. \quad (66)$$

این معادله‌ها دو متغیره هستند. این معادله نسبت به متغیر زمان که پیوسته است معادله دیفرانسیل و نسبت به اندیس n که شماره‌ی ذره و گسسته است، یک معادله تفاضلی است. ابتدا با انتخاب $x_n = C_n e^{i\omega t}$ معادله را یک متغیره می‌کنیم³ و به معادله‌ی تفاضلی زیر می‌رسیم.

$$-m\omega^2 C_n = k(C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n), \quad C_0 = C_{N+1} = 0. \quad (67)$$

برای حل این معادله حدس $C_n = CZ^n$ را جاگذاری می‌کنیم و از آن جا Z را به دست می‌آوریم.

$$Z^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right)Z + 1 = 0, \quad (68)$$

در این جا $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. واضح است که حاصل ضرب دو جواب معادله‌ی بالا $Z_1 Z_2 = 1$. در صورتی که $\omega \geq 2\omega_0$ باشد، جواب‌های Z حقیقی و معکوس هم، یعنی اندازه‌ی یکی بزرگ‌تر و اندازه‌ی دیگری کوچک‌تر از یک هستند. در صورتی که $\omega < 2\omega_0$ باشد، جواب‌های Z فاز هستند. در هر صورت دو جواب معکوس هم و جواب کلی ترکیب خطی‌ی این دو جواب است.

$$C_n = D_1 Z^n + D_2 Z^{-n}. \quad (69)$$

Z را جوابی می‌گیریم که اندازه‌اش از یک بزرگ‌تر نیست. اگر $N \rightarrow \infty$ و $\omega \geq 2\omega_0$ باشد، ضریب D_2 باید صفر شود وگرنه C_n بی‌نهایت می‌شود. معنی این حرف آن است که امواج با فرکانس‌های بزرگ‌تر از $2\omega_0$ در شبکه پخش نمی‌شود. برای تعداد محدودی ذره $C_0 = C_{N+1} = 0$ ، که نتیجه می‌دهد، $D_2 = -D_1$ و

$$Z^{N+1} - Z^{-(N+1)} = 0, \quad \Rightarrow \quad Z^{2(N+1)} = 1 \quad (70)$$

این رابطه را برای Z حقیقی و یا عددی مختلط با اندازه‌ی بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک نمی‌توان برقرار کرد. با گرفتن Z به صورت یک فاز $Z = e^{i\theta}$ نتیجه می‌شود،

$$\theta = \frac{s\pi}{N+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (71)$$

³ ضرایب در معادله‌ی (66) مستقل از زمان هستند و اگر این معادله را به شکل عمل‌گری $\mathcal{F}x_n = 0$ بنویسیم، واضح است که عمل‌گر \mathcal{F} با عمل‌گر تحول زمان، $\partial/\partial t$ ، جابه‌جایی است، پس می‌توانیم ویژه‌تابع مشترک برای آن‌ها بیابیم. $C_n e^{i\omega t}$ ویژه‌تابع عمل‌گر تحول زمان است.

با در نظر گرفتن این که x_n حقیقی است کلی‌ترین جواب برای x_n عبارت است از

$$x_n = D(e^{in\theta} - e^{-in\theta})e^{i\omega t} + D^*(e^{-in\theta} - e^{in\theta})e^{-i\omega t}. \quad (72)$$

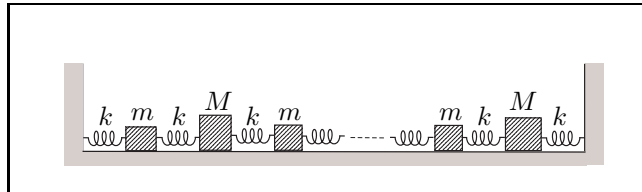
یا

$$x_n = (E \cos \omega t + F \sin \omega t) \sin n\theta. \quad (73)$$

با جاگذاری $Z = e^{i\theta}$ در معادله (68) بسامدهای طبیعی سیستم که N تا هستند به دست می‌آید.

$$\omega_s = 2\omega_0 \sin \left[\frac{s\pi}{2(N+1)} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (74)$$

حالت‌های $s = 0$ و $s = N + 1$ منجر به جواب $x_n = 0$ می‌شوند که قابل قبول نیست. حالت‌های $s > N + 1$ بسامد جدیدی نمی‌دهند. مثال 11. N جرم مشابه m و N جرم مشابه M به صورت یک در میان توسط $2N + 1$ فنر مشابه با ضریب سختی k به هم و به دیوار وصل شده‌اند. می‌خواهیم بسامدهای طبیعی این سیستم را به دست آوریم.



با نوشتن قانون نیوتن معادله‌ی حرکت جرم‌ها را در دو معادله با دو شرط مرزی زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{2n} &= k(x_{2n} + x_{2n-2} - 2x_{2n-1}) \\ m\ddot{x}_{2n-1} &= k(x_{2n} + x_{2n-2} - 2x_{2n-1}), \quad x_0 = x_{2N+1} = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

با جاگذاری حدس‌های $x_{2n} = B_{2n}e^{i\omega t}$ و $x_{2n-1} = A_{2n-1}e^{i\omega t}$ در معادله‌های بالا به معادله‌های تفاضلی‌ی جفت‌شده‌ای می‌رسیم.

$$\begin{aligned} -M\omega^2 B_{2n} &= k(A_{2n+1} + A_{2n-1} - 2B_{2n}), \\ -m\omega^2 A_{2n-1} &= k(B_{2n} + B_{2n-2} - 2A_{2n-1}), \quad B_0 = A_{2N+1} = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

از رابطه‌ی اول B_{2n} را به دست می‌آوریم

$$B_{2n} = \frac{k}{2k - M\omega^2} (A_{2n+1} + A_{2n-1}), \quad (77)$$

و در دیگری جاگذاری می‌کنیم.

$$\left[\frac{(2k - m\omega^2)(2k - M\omega^2)}{k^2} - 2 \right] A_{2n-1} = A_{2n+1} + A_{2n-3}. \quad (78)$$

در این جا ما به یک معادله‌ی تفاضلی برای A_n می‌رسیم. البته واضح است چون تنها A_n با شاخص‌های فرد در معادله‌ها وارد شد، از این روابط تنها A_n با شاخص‌های فرد به دست می‌آید. برای حل این معادله‌ی تفاضلی جواب را به صورت $A_{2n-1} = AZ^{2n-1}$ می‌گیریم. B_{2n} نیز با جاگذاری A_{2n+1} و A_{2n-1} در معادله‌ی (77) به دست می‌آید

$$B_{2n} = BZ^{2n}, \quad B := \frac{2k - m\omega^2}{k(Z + Z^{-1})} A. \quad (79)$$

با جاگذاری $A_{2n-1} = AZ^{2n-1}$ در معادله‌ی (78) معادله‌ی زیر برای Z به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{(2k - m\omega^2)(2k - M\omega^2)}{k^2} - 2 &= Z^2 + Z^{-2} \\ \Rightarrow \quad \omega^4 m M - 2k\omega^2(m + M) - k^2(Z - Z^{-1})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (80)$$

مثال‌های قبلی جواب‌های Z معکوس هم هستند. جواب کلی‌ی A_{2n-1} و B_{2n} به صورت زیر هستند،

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= AZ^{2n-1} + A'Z^{-2n+1} \\ x_{2n} &= BZ^{2n} + B'Z^{-2n}. \end{aligned} \quad (81)$$

A و B (و همین‌طور A' و B') مطابق (79) به هم مربوط‌اند. با استفاده از شرط مرزی $B = B'$ ، $B_0 = 0$ می‌شود. شرط مرزی $A_{2N+1} = 0$ مقدار Z را معین می‌کند.

$$Z^{2N+1} - Z^{-(2N+1)} = 0, \quad \Rightarrow \quad Z^{2(2N+1)} = 1 \quad (82)$$

این رابطه را برای Z حقیقی نمی توان برقرار کرد. با گرفتن $Z = e^{i\theta}$ نتیجه می شود،

$$\theta = \frac{s\pi}{2N+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (83)$$

با جاگذاری این مقدار برای Z در (78)، $2N$ بسامدهای طبیعی سیستم به دست می آید.

$$(\omega_s^\pm)^2 = \frac{k}{\mu} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \theta_s} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (84)$$

در این رابطه $\mu := mM/(m+M)$. فرض کنیم $M > m$. واضح است که $\omega_s^+ \geq \sqrt{2k/\mu}$ و بنا بر این $B/A \leq 0$. یعنی این بسامدها مربوط به وقتی است که حرکت جرم های مجاور غیرهم فاز است. از طرف دیگر $\omega_s^- \leq \sqrt{2k/\mu}$ و بنا بر این $B/A \geq 0$. یعنی این بسامدها مربوط به وقتی است که حرکت جرم های مجاور هم فاز است. خوب است همین مسئله برای وقتی که تعداد ذرات فرد است، یعنی مثلاً تعداد m ها یکی بیش تر از M ها است، بررسی کنید. حالت جالب دیگر این است که یکی از دیوارها حرکت هم آهنگ داشته باشد. در این صورت نوسان گرهای واداشته داریم.

مثال 12) حالا بیایید مسئله ی ول گشت متقارن را بررسی کنیم. در هر قدم ول گرد به یک اندازه و با احتمال $1/2$ به سمت چپ و یا راست می رود. احتمال آن که در قدم n ام در مکان s باشد را $P_{n,s}$ می گیریم. برای آن که در قدم $(n+1)$ ام در مکان s باشد، باید در قدم n ام در مکان $(s-1)$ یا $(s+1)$ باشد.

$$P_{n+1,s} = \frac{1}{2} [P_{n,s-1} + P_{n,s+1}]. \quad (85)$$

این معادله را معادله ی مادر می نامند. با تعریف تابع مولد

$$G_n(Z) := \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} P_{n,s} Z^s \quad (86)$$

و استفاده از معادله ی مادر، معادله ای برای تابع مولد به دست می آید.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(Z) &= \frac{1}{2} [ZG_n(Z) + Z^{-1}G_n(Z)], \\ \Rightarrow \frac{G_{n+1}(Z)}{G_n(Z)} &= \frac{Z + Z^{-1}}{2} \\ \Rightarrow G_n(Z) &= \left(\frac{Z + Z^{-1}}{2} \right)^n G_0(Z). \end{aligned} \quad (87)$$

مکان اولیه‌ی ول‌گرد را مبدأ مختصات می‌گیریم. در این صورت $P_{0,s} = \delta_{s,0}$ ، که از این جا

$$G_0(Z) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} P_{0,s} Z^s = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \delta_{s,0} Z^s = 1 \quad (88)$$

بنا بر این تابع مولد می‌شود

$$\begin{aligned} G_n(Z) &= \left(\frac{Z + Z^{-1}}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n (Z + Z^{-1})^n \\ &= \sum_{m=0}^{m=n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{Z^{n-2m}}{2^n} \end{aligned} \quad (89)$$

با تغییر متغیر $s := n - 2m$ و مقایسه‌ی این جواب با تعریف تابع مولد، $P_{n,s}$ به دست می‌آید.

$$P_{n,s} = \begin{cases} \frac{n!}{[(n-s)/2]![(n+s)/2]!} \frac{1}{2^n}, & n+s = \text{زوج} \\ 0, & n+s = \text{فرد} \end{cases} \quad (90)$$

تابع مولد خواص دیگری نیز دارد. بقای احتمال نتیجه می‌دهد

$$G_n(1) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} P_{n,s} = 1. \quad (91)$$

مکان متوسط ول‌گرد در قدم n ام را بر حسب تابع مولد می‌توانیم بنویسیم.

$$\left. \frac{dG_n(Z)}{dZ} \right|_{Z=1} = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} s P_{n,s} = \bar{s}. \quad (92)$$

برای این مثال خاص یعنی مسئله‌ی ول‌گشت متقارن $\bar{s} = 0$ و s^2 را نیز بر حسب مشتق‌های $G_n(Z)$ می‌شود نوشت.

قدردانی - لازم می‌دانم از محمد خرمی و امیرحسین فتح‌اللهی، و احمد شریعتی برای پیش‌نهادهای مفیدی که در مورد این مقاله داشتند تشکر کنم.

۵ مراجع

در کتاب‌های زیر معادله‌های تفاضلی مطالعه شده است.

[1] Bender, Carl. M., Orszag, Steven. A.; Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers; McGraw Hill.

- [2] Kulenovic M.R.S., Merino O.; Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica; Chapman & Hall.