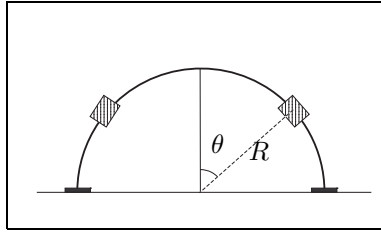


در شماره ی ۲ گاما مسئله‌ای زیر مطرح شده بود.

نیم حلقه‌ای به جرم M روی سطحی افقی قرار دارد. فرض کنید که صفحه‌ی نیم حلقه هم‌واره قائم می‌ماند. مطابق شکل دو دانه‌ی تسبیح هر یک به جرم m به طور متقارن از بالای نیم حلقه با اختلالی کوچک به پایین لغزیده‌اند. نیرویی که میز به نیم حلقه وارد می‌کند ثابت نیست.

الف — چه شرطی برقرار باشد که در زاویه‌ای مثل θ_0 این نیرو صفر شود؟

ب — فرض کنید این شرط برقرار باشد؛ آیا نیم حلقه از میز جدا می‌شود؟ ابتدا حالتی را در نظر بگیریم که نیم حلقه روی میز است.



نیروی عمودی‌ی بین نیم حلقه و دانه‌های تسبیح را N' می‌گیریم. قانون نیوتن برای هر تسبیح عبارت است از

$$\begin{aligned} N' + mg \cos \theta &= mR\dot{\theta}^2 \\ mg \sin \theta &= mR\ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (۱)$$

زمانی که دانه‌ی تسبیح بالای نیم حلقه است نیروی عمودی‌ی وارد بر آن شعاعی و به سمت بیرون است. اندازه‌ی این نیرو با پایین آمدن دانه‌ی تسبیح کوچک می‌شود. اگر به جای دانه‌ی تسبیح ذره‌ای روی نیم حلقه حرکت کند جایی که این نیرو صفر شود ذره از نیم حلقه جدا می‌شود. اما دانه‌ی تسبیح نمی‌تواند از نیم حلقه جدا شود، بنا بر این پس از گذشتن از این نقطه جهت نیروی عمودی‌ی بین نیم حلقه و دانه‌های تسبیح معکوس می‌شود یعنی شعاعی و به سمت داخل می‌شود. پس طبق قانون سوم نیوتن نیرویی که هر دانه‌ی تسبیح به نیم حلقه وارد می‌کند شعاعی و به سمت خارج خواهد بود. چنان که خواهیم داد اگر مجموع جرم دانه‌ها از سه برابر جرم نیم حلقه بیشتر باشد زاویه‌ای وجود دارد که نیروی قائم وارد بر نیم حلقه از طرف دانه‌های تسبیح از وزن نیم حلقه بیشتر شود. برای آن که N' را بر حسب θ به دست آوریم، باید ابتدا $\dot{\theta}$ را بر حسب θ به دست آوریم. دو کار می‌شود کرد یا از مؤلفه‌ی θ ی قانون نیوتن نسبت به زمان انتگرال بگیریم یا آن که مستقیماً از پایستگی انرژی استفاده کنیم. در هر صورت نتیجه می‌شود

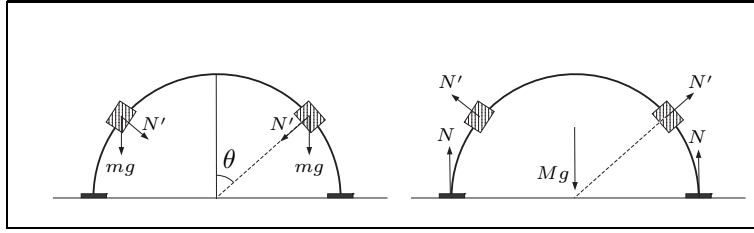
$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta = mgR, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta). \quad (۲)$$

که با جاگذاری در رابطه‌ی اول (۱)، N' به دست می‌آید.

$$N' = mg(3 \cos \theta - 2) \quad (۳)$$

با استفاده از قانون نیوتن برای نیم حلقه نیرویی که از زمین بر آن وارد می‌شود به دست می‌آید.

$$2N = 2N' \cos \theta + Mg \Rightarrow N = mg \cos \theta (3 \cos \theta - 2) + \frac{Mg}{2} \quad (۴)$$



در زاویه‌ای مثل θ_0 ، نیرویی از کف زمین به نیم حلقه وارد نمی‌شود، یعنی اگر نیم حلقه روی کف ترازویی باشد دانه‌های تسبیح به زاویه‌ی θ_0 می‌رسند، ترازو وزن صفر را نشان می‌دهد. برای آن که زاویه‌ای مثل θ_0 وجود داشته باشد باید معادله‌ی

$$3 \cos^2 \theta_0 - 2 \cos \theta_0 + \frac{M}{2m} = 0, \quad (۵)$$

برای θ_0 جواب داشته باشد. این معادله علی‌الاصول دو جواب دارد

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}}. \quad (۶)$$

یکی از این زاویه‌ها کوچک‌تر از $\cos^{-1}(1/3)$ و دیگری بزرگ‌تر از $\cos^{-1}(1/3)$ است. هنگامی که دانه‌ها از حلقه پایین می‌آیند ابتدا به زاویه‌ی کوچک‌تر می‌رسند. پس جواب مورد نظر ما

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}}, \quad (۷)$$

است. در صورتی که $3M > 2m$ باشد معادله‌ی بالا برای θ_0 جواب ندارد.

حالا فرض کنید $3M \leq 2m$. ببینیم آیا نیم حلقه از زمین بلند می‌شود. اگر نیم حلقه از زمین بلند شود، ارتفاع مرکزش را با h نشان دهیم. برای آن که نیم حلقه از زمین بلند شود باید یکی از مشتقات زمانی h غیر صفر باشد. زمانی که دانه‌های تسبیح به زاویه‌ی θ_0 می‌رسند را T می‌گیریم. $\dot{\theta}_\pm$ و $\ddot{\theta}_\pm$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\dot{\theta}_\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \theta|_{t=T \pm \epsilon},$$

$$\ddot{\theta}_{\pm} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \dot{\theta}|_{t=T \pm \epsilon}. \quad (8)$$

علامت اندیس \pm برای کمیت‌های دیگر را نیز به همین صورت تعریف می‌کنیم. با این نماد

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_-^2 &= \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta_0), \\ \ddot{\theta}_- &= \frac{g}{R} \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (9)$$

انرژی مجموعی نیم حلقه و دانه‌های تسبیح عبارت است از

$$\frac{1}{2}M\dot{h}^2 + [(\dot{h} - R\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (R\dot{\theta} \cos \theta)^2] + Mgh + 2mg(h + R \cos \theta) = 2mgR. \quad (10)$$

با دانستن این که در لحظه‌ی بلند شدن $h+$ و \dot{h}_+ صفر هستند، $\dot{\theta}_+^2$ را می‌توانیم به دست آوریم

$$\dot{\theta}_+^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta_0), \quad (11)$$

که همان مقدار $\dot{\theta}_-^2$ است. اگر از رابطه‌ی (10) نسبت به زمان مشتق بگیریم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{M+2m}{2} \ddot{h} \dot{h} + 2mR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - 2mR(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \dot{h} \\ + (Mg + 2mg) \dot{h} - 2mgR \dot{\theta} \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

از این جا $\ddot{\theta}_+$ به دست می‌آید.

$$2mR^2 \dot{\theta}_+ \ddot{\theta}_+ - 2mgR \dot{\theta}_+ \sin \theta_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}_+ = \frac{g}{R} \sin \theta_0. \quad (13)$$

که $\ddot{\theta}_+$ نیز همان مقدار $\ddot{\theta}_-$ است. از رابطه‌ی (10) نمی‌توانیم \dot{h}_+ را به دست آوریم. برای به دست آوردن \dot{h}_+ می‌توانیم معادله‌ی نیوتن را برای مجموعی نیم حلقه و دانه‌های تسبیح بنویسیم.

$$M\ddot{h} + 2m\ddot{y} = -(M + 2m)g \quad (14)$$

برای استفاده از این رابطه باید ابتدا y را بر حسب h و θ به دست آوریم،

$$y = h + R \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \ddot{h} - R(\ddot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta), \quad (15)$$

و سپس در (14) جاگذاری کنیم. به این طریق \ddot{h} به دست می‌آید.

$$\ddot{h} = \frac{2mR}{M+2m}(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) - g. \quad (16)$$

اگر $\dot{\theta}_+$ و $\ddot{\theta}_+$ را از (۱۱) و (۳۱) در رابطه‌ی بالا جاگذاری کنیم $\ddot{h}_+ = 0$ می‌شود. پس $\ddot{h}_+ = \ddot{h}_-$ است یعنی \ddot{h} نیز مثل $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ پیوسته است. حالا بیاییم مشتق بعدی‌ی h را به دست آوریم. با مشتق‌گیری‌ی مستقیم از (۶۱)، $\ddot{\ddot{h}}$ به دست می‌آید.

$$\ddot{\ddot{h}} = \frac{2mR}{M+2m}(3\dot{\theta}\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^3 \sin \theta + \ddot{\theta} \sin \theta). \quad (17)$$

علی‌الاصول با داشتن $\ddot{\theta}$ و جاگذاری در رابطه‌ی بالا می‌توانیم $\ddot{\ddot{h}}$ را به دست آوریم. برای این کار از رابطه‌ای که برای پایستگی‌ی انرژی نوشتیم مجدداً مشتق می‌گیریم. نتیجه برای $\ddot{\theta}_+$ عبارت است از

$$R\ddot{\theta}_+ = g\dot{\theta}_+ \cos \theta. \quad (18)$$

کافی است این مقدار برای $\ddot{\theta}_+$ را در رابطه‌ی (۶۱) قرار دهیم.

$$\ddot{\ddot{h}}_+ = \frac{4mg\dot{\theta}_+}{M+2m} \sin \theta_0 (3 \cos \theta_0 - 1). \quad (19)$$

از رابطه‌ی (۶) پیداست که $\cos \theta_0 > 1/3$. پس $\ddot{\ddot{h}}_+ > 0$ یعنی در صورتی که شرط $m > 3M/2$ وجود داشته باشد زاویه‌ای مثل θ_0 وجود دارد که وقتی دانه‌های تسبیح به آن زاویه می‌رسند، نیم حلقه نیرویی به زمین وارد نمی‌کند. در چنین لحظه‌ای نیم حلقه از زمین بلند می‌شود.