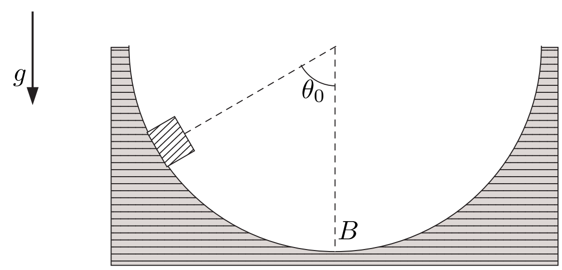
حرکت یک جسم درونِ یک نیم‌کره

امیر آقامحمدی

حرکتِ یک جسم درونِ یک نیم‌کره‌ی ثابت که اصطکاک دارد بررسی می‌شود. بسته به مکانِ اولیه‌ی جسم و این‌که اندازه‌ی ضریبِ اصطکاک از یک مقدارِ حدی‌ی $\mu_0 \approx 0.603$ بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر باشد حرکتِ جسم متفاوت است.

جسمی به جرمِ m را از زاویه‌ی θ_0 درونِ نیم‌کره‌ی ثابتی به شعاعِ R رها می‌کنیم. ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و جنبشی بینِ m و سطحِ داخلی‌ی نیم‌کره μ است. یک مقداری حدی‌ی $\mu_0 \approx 0.603$، برایِ ضریبِ اصطکاک وجود دارد. اگر $\mu > \mu_0$ باشد ممکن است ذره ساکن بماند و یا حرکت کند، ولی در هر صورت به پایین‌ترین نقطه‌ی نیم‌کره نمی‌رسد. در صورتی که $\mu < \mu_0$ باشد بسته به مکانِ اولیه‌ی جسم چند حالت ممکن است رخ دهد. اگر $\theta_0 < \arctan\mu$ باشد ذره سرِ جایِ خودش می‌ایستد. زاویه‌ای مثلِ β وجود دارد که به μ بستگی دارد. اگر ذره با زاویه‌ی $\arctan\mu < \theta_0 < \beta$ رها شود حرکت می‌کند ولی قبل از رسیدنِ به نقطه‌ی B می‌ایستد. به ازایِ $\theta_0 > \beta$ ذره حرکت می‌کند، به B می‌رسد و از آن می‌گذرد.



شکلِ ۱– جسمی را از زاویه‌ی θ_0 درونِ نیم‌کره‌ای با ضریبِ اصطکاکِ μ رها می‌کنیم.

معادله‌هایِ نیوتن در راستایِ شعاعی و مماسی عبارت‌اند از

$$-mg\sin\theta + \mu N = mr\ddot{\theta}$$

$$N - mg\cos\theta = mr\dot{\theta}^2. \tag{1}$$

با حذفِ N از این دو معادله می‌توانیم معادله‌ی دیفرانسیلی برایِ θ به دست می‌آید.

$$\ddot{\theta} - \mu\dot{\theta}^2 = \frac{g}{r}(\mu\cos\theta - \sin\theta). \tag{2}$$

با استفاده از $\ddot{\theta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}$ و تغییرِ متغیرِ $v = r\dot{\theta}$ معادله‌ی دیفرانسیلِ بالا به صورتِ زیر در می‌آید

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}\theta} - 2\mu v^2 = 2gr(\mu\cos\theta - \sin\theta). \tag{3}$$

این معادله‌ی دیفرانسیل یک جوابِ هم‌گن دارد که $\mathrm{e}^{2\mu\theta}$ است. جوابِ خصوصی‌یِ معادله هم ترکیبی خطی از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ است. بنابراین جوابِ کلی به شکلِ زیر است

$$v^2 = A_0\mathrm{e}^{2\mu\theta} + A_1\cos\theta + A_2\sin\theta. \tag{4}$$

برایِ به دست آوردنِ ثابت‌هایِ A_1 و A_2 کافی‌است این جواب را در معادله جاگذاری‌کنیم و ضرایبِ $\sin\theta$ (و همین‌طور $\cos\theta$) در دو طرف را مساوی قرار دهیم. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2gr(1-2\mu^2)}{1+4\mu^2} \\ A_2 &= \frac{6\mu gr}{1+4\mu^2} \end{aligned} \tag{5}$$

ثابتِ A_0 هم از شرایطِ اولیه به دست می‌آید

$$\begin{aligned} &v^2(\theta_0) = A_0\mathrm{e}^{2\mu\theta_0} + \frac{2gr}{1+4\mu^2}[(1-2\mu^2)\cos\theta_0 + 3\mu\sin\theta_0] = 0 \\ &\Rightarrow \quad A_0 = \frac{2gr\,\mathrm{e}^{-2\mu\theta_0}}{1+4\mu^2}[(1-2\mu^2)\cos\theta_0 + 3\mu\sin\theta_0] \end{aligned}$$

با جمع‌وجور کردنِ این‌ها نتیجه می‌شود

$$v^2 = \frac{2gr\,\mathrm{e}^{2\mu\theta}}{1+4\mu^2}[K(\theta) - K(\theta_0)] \tag{6}$$

که

$$K(\theta) := \mathrm{e}^{-2\mu\theta}[(1-2\mu^2)\cos\theta + 3\mu\sin\theta] \tag{7}$$

البته به $K(\theta)$ می‌توان هر مقدارِ ثابتی را اضافه کرد. برایِ این‌که ذره تا پایین‌ترین نقطه‌یِ نیم‌کره برسد باید شرطِ $v(\theta=0) \geq 0$ برقرار باشد. این شرط معادل است با $K(0) \geq K(\theta_0)$

$$(1-2\mu^2) \geq \mathrm{e}^{-2\mu\theta_0}[(1-2\mu^2)\cos\theta_0 + 3\mu\sin\theta_0] \tag{8}$$

حالا اگر $\theta_0 = \pi/2$ باشد نتیجه می‌شود

$$(1-2\mu^2) \geq 3\mu\,\mathrm{e}^{-\mu\pi} \tag{9}$$

به ازایِ $\mu = 0$ این شرط بدیهی است و به ازایِ $\mu^2 > 1/2$ این شرط به وضوح نقض می‌شود. بنابراین به‌ازایِ مقادیری از μ ذره قبل از رسیدنِ به نقطه‌یِ B می‌ایستد. شرطِ آن‌که ذره در همان نقطه‌یِ θ_0 بماند

$$mg\sin\theta_0 \leq \mu mg\cos\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \tan\theta_0. \tag{10}$$

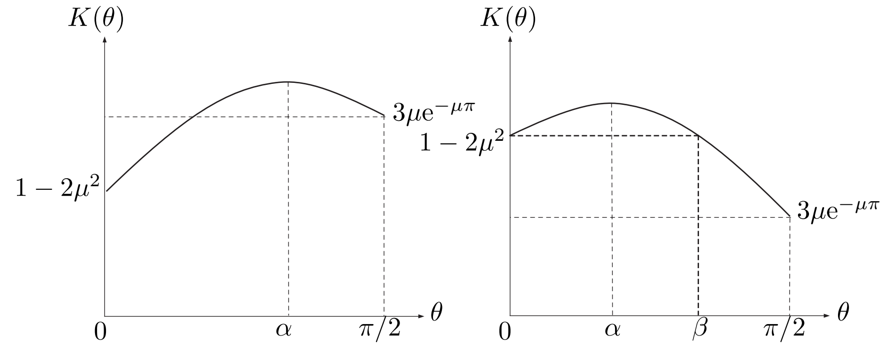
اگر $\alpha := \arctan\mu$ بگیریم، برایِ تمامِ زاویه‌هایِ کوچک‌تر از α ذره سرِ جایِ خودش می‌ایستد.

شرطِ این که ذره حرکت کند ولی از حرکت نایستد این است که $K(\theta) > K(\theta_0)$. بیایید ببینیم تابعِ $K(\theta)$ چه شکلی است. ابتدا ببینیم که آیا این تابع بیشینه و یا کمینه‌ای دارد

$$\begin{aligned} K'(\theta) &= [-(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 2\mu(1-2\mu^2)\cos\theta - 6\mu^2\sin\theta]\mathrm{e}^{-2\mu\theta} \\ &= (1+4\mu^2)(\mu\cos\theta - \sin\theta)\mathrm{e}^{-2\mu\theta}. \end{aligned} \tag{11}$$

پس تابعِ $K(\theta)$ تنها در زاویه‌یِ α فرینه می‌شود. اما $K'(0) = \mu(1+4\mu^2) > 0$ و $K'(\pi/2) = -(1+4\mu^2)\mathrm{e}^{-\mu\pi} < 0$ است. پس تابعِ $K(\theta)$ در $\theta = 0$ صعودی و در $\theta = \pi/2$ نزولی است. بنابراین زاویه‌یِ α زاویه‌ای است که $K(\theta)$ را بیشینه می‌کند. پس

علی‌الاصول $K(\theta)$ بسته به این که $K(0)$ و $K(\pi/2)$ کدام‌یک بزرگ‌تر باشند، شبیهِ یکی از دو شکلِ زیر است.



الف) $\mu > 0.6$ ب) $\mu < 0.6$

شکلِ ۲— الف) $\mu > \mu_0 \approx 0.6$، ب) $\mu < \mu_0 \approx 0.6$

فرض کنید μ_0 مقدارِ حدی‌ای باشد که بینِ دو حالتِ الف) و ب) فرق می‌گذارد. بیایید جوابِ معادله‌یِ

$$2\mu_0^2 - 1 + 3\mu_0 e^{-\mu_0\pi} = 0, \tag{12}$$

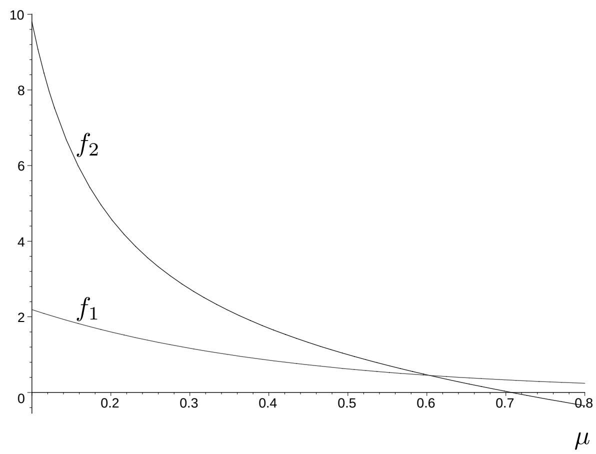
را به طورِ تقریبی به دست آوریم. برایِ این کار می‌توانیم محلِ تقاطعِ دو منحنی‌یِ $f_1(\mu) = 3e^{-\mu\pi}$ و $f_2(\mu) = 1/\mu - 2\mu$ را به دست آوریم. $f_1(0) = 3$ است و به ازایِ $\mu > 0$ تابعی نزولی است و در $\mu \to \infty$ به سمتِ صفر می‌رود. $f_2(0) \to \infty$ به ازایِ $\mu > 0$ تابعی نزولی است و $f_2(1/\sqrt{2}) = 0$. بنابراین این دو منحنی هم‌دیگر را در $0 < \mu_0 < 1/\sqrt{2}$ قطع می‌کنند. بیایید جوابی مثلِ $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ را در نظر بگیریم. با جاگذاری‌یِ این مقدار در معادله‌یِ (12)

$$2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon)^2 - 1 + 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon)e^{-\pi(\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon)} = 0 \tag{13}$$

و نگه‌داشتنِ جملاتِ تا رتبه‌یِ یک نتیجه می‌شود

$$\epsilon = [\pi - \sqrt{2} - \frac{4e^{\pi/\sqrt{2}}}{3}]^{-1} \approx -0.09 \tag{14}$$

پس $\mu_0 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon \approx 0.6$ است. اگر با نرم‌افزاری مثلِ Maple این محاسبه را انجام دهیم $\mu_0 \approx 0.603$ به دست می‌آید.



شکلِ ۳– محلِ تقاطعِ دو منحنیِ $f_1(\mu) = 3\mathrm{e}^{-\mu\pi}$ و $f_2(\mu) = 1/\mu - 2\mu$ در نقطه‌یِ $\mu_0 \approx 0.603$ است.

بسته به مکانِ اولیه‌یِ جسم و این‌که اندازه‌یِ ضریبِ اصطکاک از مقدارِ حدی‌یِ $\mu_0 \approx 0.603$ بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر باشد حرکتِ جسم متفاوت است. بیایید این دو حالت را جداگانه بررسی کنیم.

همان‌طور که از شکل هم پیداست به ازایِ $\mu > \mu_0 \approx 0.6$، $3\mathrm{e}^{-\mu\pi} > 1/\mu - 2\mu$ یا $K(\pi/2) > K(0)$ و به ازایِ $\mu < \mu_0$، $3\mathrm{e}^{-\mu\pi} < 1/\mu - 2\mu$ یا $K(\pi/2) < K(0)$.

الف) فرض کنید $K(\theta)$ شبیهِ شکلِ الف) باشد، یعنی $\mu > \mu_0 \approx 0.6$، به ازایِ هر θ_0، $K(\theta_0) > K(0)$.

- ذره از هر جایی بینِ 0 و $\pi/2$ رها شود حتماً به نقطه‌یِ B نمی‌رسد.
- به ازایِ $0 < \theta_0 < \alpha$، ذره سرِ جایِ خودش باقی می‌ماند.
- اگر $\theta_0 > \alpha$ باشد، ذره حرکت می‌کند ولی در زاویه‌ای کوچک‌تر از α قبل از رسیدن به نقطه‌یِ B از حرکت می‌ایستد.

ب) فرض کنید $K(\theta)$ شبیهِ شکلِ ب) باشد، یعنی $\mu < \mu_0 \approx 0.6$،

- اگر $0 < \theta_0 < \alpha$ باشد، ذره سرِ جایِ خودش باقی می‌ماند.

- اگر $\alpha < \theta_0 < \beta$ باشد، ذره حرکت می‌کند ولی قبل از رسیدن به نقطه‌یِ B از حرکت می‌ایستد.
- به ازایِ $\beta < \theta_0$، $K(\theta_0) < K(0)$. در این صورت ذره اگر از زاویه‌ای بینِ β و $\pi/2$ رها شود حتماً به نقطه‌یِ B می‌رسد.