

فاصله‌ی نسبی ذرات کوانتومی

امیر آقامحمدی

چکیده: این یک یادداشت آموزشی است در مورد این که چرا می‌گویند بوزون‌های یکسان تمایل دارند که به هم نزدیک شوند و فرمیون‌های یکسان تمایل دارند از هم دور شوند.

یکی از مباحثی که در درس مکانیک کوانتومی مطرح می‌شود بحث ذرات یک‌سان است. مکانیک کوانتومی برای ذرات یک‌سان پیش‌بینی‌هایی می‌کند که با مکانیک کلاسیک متفاوت است. یکی از پارامترهای ذاتی ذره مثل جرم و یا بار ذره، اسپین آن است. اسپین مشابه کلاسیک هم ندارد. اسپین ذرات یا صحیح است یا نیمه صحیح. ذرات با اسپین صحیح بوزون و ذرات با اسپین نیمه صحیح فرمیون هستند. تابع حالت دستگاهی که از چند ذره‌ی یک‌سان تشکیل شده بسته به آن که آن‌ها بوزون و یا فرمیون باشند نسبت به جابه‌جایی هر دو ذره‌ی یک‌سان، متقارن و یا پادمقارن است. تابع حالت کل ترکیب خطی‌ای از حاصل ضرب تابع اسپینی و تابع فضایی است. مثلاً برای دو بوزون یک‌سان اگر تابع حالت اسپینی متقارن باشد تابع حالت فضایی هم باید متقارن باشد و اگر تابع حالت اسپینی پادمقارن باشد تابع حالت فضایی هم باید پادمقارن باشد. این‌ها برای این است که متقارن بودن تابع حالت کل برای یک سیستم دو بوزونی تضمین شود. فرض کنید این ذرات با هم برهم‌کنشی ندارند و همه‌ی ذرات در یک پتانسیل خارجی قرار دارند. برای

یک دستگاه دو ذره‌ای که ذره‌ی 1 در حالت a با تابع حالت $u_a(x_1)$ و ذره‌ی 2 در حالت b با تابع حالت $u_b(x_2)$ است، تابع حالت فضایی $\Psi(x_1, x_2) = u_a(x_1)u_b(x_2)$ است. اگر دو ذره یک‌سان باشند دیگر معنی ندارد بگوییم که کدام ذره در کدام حالت است. بسته به بوزون و یا فرمیون بودن ذرات و آن که تابع حالت اسپینی چه تقارنی داشته باشد تابع حالت فضایی می‌تواند متقارن و یا پادمقارن باشد،

$$\Psi^{a,s}(x_1, x_2) = \frac{u_a(x_1)u_b(x_2) \pm u_a(x_2)u_b(x_1)}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

ضریب اضافی $1/\sqrt{2}$ برای بهنجار بودن تابع حالت است. شاخص s برای حالت متقارن و شاخص a برای حالت پادمقارن است. در این روابط علامت مثبت (منفی) برای حالت متقارن (پادمقارن) است.

این متقارن و یا پادمقارن بودن یک خاصیت کوانتمی است که در حالت کلاسیک سابقه‌ای از آن نداشتیم. این خاصیت منجر به آثاری می‌شود که تنها در حالت کوانتمی رخ می‌دهند. یکی از این اثرها آن است که هیچ دو فرمیون یک‌سانی نمی‌توانند در یک حالت باشند، به این دلیل که تابع حالت کل نسبت به جابه‌جایی دو ذره پادمقارن است و اگر دو ذره در یک حالت باشند، تابع حالت کل صفر می‌شود. برعکس بوزون‌های یک‌سان می‌توانند همگی در یک حالت کوانتمی قرار بگیرند. این اثر منجر به پدیده‌ی چگالش بوز و آبرشارگی می‌شود.

فرض کردیم که خود ذرات با هم برهم‌کنشی ندارند ولی با این همه می‌توان نشان داد که اگر دو ذره در حالت فضایی متقارن باشند به طور مؤثر به هم نزدیک‌تر و اگر در حالت فضایی پادمقارن باشند به طور مؤثر از هم دورترند. برای نشان دادن کمی این مطلب بیایید فاصله‌ی نسبی دو ذره را حساب کنیم.

$$X := x_1 - x_2. \quad (2)$$

برای محاسبه‌ی مکان نسبی دو ذره باید متوسط x_1 و متوسط x_2 را محاسبه کنیم.

$$\langle X \rangle = \langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle$$

$$\langle x_1 \rangle = \langle \Psi | x_1 | \Psi \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle u_a \otimes u_b \pm u_b \otimes u_a | x_1 | u_a \otimes u_b \pm u_b \otimes u_a \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [\langle u_a | x | u_a \rangle \langle u_b | u_b \rangle \pm \langle u_a | x | u_b \rangle \langle u_b | u_a \rangle \\
&\quad \pm \langle u_b | x | u_a \rangle \langle u_a | u_b \rangle + \langle u_b | x | u_b \rangle \langle u_a | u_a \rangle] \\
&= \frac{1}{2} (\langle x_a \rangle + \langle x_b \rangle). \tag{۳}
\end{aligned}$$

که x_b و x_a متوسط‌گیری مکان روی حالت‌های a و b است.

$$\langle x_a \rangle := \langle u_a(x) | x | u_a(x) \rangle \quad \langle x_b \rangle := \langle u_b(x) | x | u_b(x) \rangle. \tag{۴}$$

به همین صورت $\langle x_2 \rangle$ را می‌توانیم به دست آوریم که همان مقدار $\langle x_1 \rangle$ است. در این صورت مکان متوسط نسبی دو ذره $\langle X \rangle$ صفر است. در واقع $x_1 - x_2$ هم می‌تواند مثبت و هم می‌تواند منفی باشد و به طور متوسط مقدار آن صفر است. برای آن که ببینیم فاصله‌ی نسبی دو ذره چه قدر است بیایید بردایی X ، یعنی $(\Delta X)^2$ را به دست آوریم. اگر با محاسبه‌ی مشابهی $\langle x_1^2 \rangle$ و $\langle x_2^2 \rangle$ را به دست آوریم، نتیجه می‌شود

$$\langle x_1^2 \rangle = \langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x_a^2 \rangle + \langle x_b^2 \rangle) \tag{۵}$$

که

$$\langle x_a^2 \rangle := \langle u_a(x) | x^2 | u_a(x) \rangle \quad \langle x_b^2 \rangle := \langle u_b(x) | x^2 | u_b(x) \rangle. \tag{۶}$$

و $\langle x_1 x_2 \rangle$ نیز عبارت است از

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_a \rangle \cdot \langle x_b \rangle \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2, \tag{۷}$$

که

$$\langle x \rangle_{ab} := \langle u_a | x | u_b \rangle. \tag{۸}$$

با جمع و جور کردن این جملات بردایی X به دست می‌آید،

$$(\Delta X_{s,a})^2 = \langle (x_a - x_b)^2 \rangle \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2, \tag{۹}$$

که $\langle (x_a - x_b)^2 \rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle (x_a - x_b)^2 \rangle := \langle x_a^2 \rangle + \langle x_b^2 \rangle - 2 \langle x_a \rangle \langle x_b \rangle. \quad (10)$$

برای حالت متقارن فاصله‌ی متوسط دو ذره کم‌تر و برای حالت پادمقارن فاصله‌ی متوسط دو ذره بیش‌تر است. برای حالتی که دو ذره یک‌سان نیستند این مقدار

$$(\Delta X)^2 = \langle (x_a - x_b)^2 \rangle \quad (11)$$

که متوسط وردایی برای دو حالت متقارن و پادمقارن است. دو فرمیون، مثلاً دو الکترون، اگر حالت اسپینی پادمقارنی داشته باشند حالت فضایی‌شان باید متقارن باشد؛ یعنی این دو الکترون نسبت به حالت دو ذره‌ی کلاسیک و یا دو بوزونی که در حالت فضایی پادمقارن هستند به هم نزدیک‌ترند. دو ذره را در حالت‌های پایه و برانگیخته‌ی اول بگیریم. برای جعبه‌ای به عرض $2a$ ، وردایی X در حالتی که دو ذره در حالت متقارن فضایی، پادمقارن فضایی و وقتی که دو ذره غیریک‌سان اند عبارت است از

$$(\Delta X_s)^2 \approx 0.15 a^2, \quad (\Delta X_a)^2 \approx 0.67 a^2, \quad (\Delta X)^2 \approx 0.41 a^2. \quad (12)$$

قدردانی: از خانم هانیه‌ی کُمایی مقدم برای طرح سئوالی که منجر به نوشتن این یادداشت شد تشکر می‌کنم.