سرعتِ زاویه‌ایِ جسمِ دوّار در چارچوبِ فضا

امیر آقامحمدی

چکیده— اگر معادله‌هایِ اویلر برایِ حرکتِ جسمِ دوّار را حل کنیم، مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ایِ جسم در چارچوبِ دوّار به دست می آیند. به دست آوردنِ مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ای در چارچوبِ فضا کارِ پیچیده‌تری است. یک راهِ حلِ کلی برایِ به دست آوردنِ سرعتِ زاویه‌ای در چارچوبِ فضا ارائه می‌شود. هر چند جوابی که به دست می آید یک جوابِ صوری است و به دست آوردنِ شکلِ صریح آن هنوز پیچیده است. دورانِ آزادِ جسمِ متقارن به عنوانِ مثال حل می‌شود.

۱ چارچوبِ دوّار و معادله‌یِ اویلر

در بسیاری از کتاب‌هایِ درسی‌یِ مکانیک بخشی تحتِ عنوانِ دورانِ جسمِ صلب یا عنوان‌هایی مشابه وجود دارد. در این بخش از کتاب معادله‌هایِ اویلر به دست می آید و معمولاً با حلِّ این معادله‌ها مسپله تمام می‌شود. ولی واقعاً با حلِّ این معادله‌ها، مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ایِ جسم در چارچوبِ دوّار به دست می آیند. با این‌کار اطلاعاتی در موردِ دورانِ جسم به دست می آیند ولی برایِ داشتنِ همه‌یِ اطلاعات در موردِ دورانِ جسم باید مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ایِ جسم در چارچوبِ فضا به دست آیند. این‌کار معمولاً پیچیده است. گاهی آن‌ها را با استفاده از زوایایِ اویلر می‌توان به دست آورد. اما ما در این‌جا از روشِ دیگری استفاده می‌کنیم.

دو چارچوبِ S و S' که مبدأِشان بر هم منطبق است را در نظر بگیرید. چارچوبِ S را چارچوبِ فضا و چارچوبِ S' را چارچوبی متحرک و چسبیده به جسم در نظر بگیرید. بردارِ مکان نقطه‌ای از جسم در چارچوبِ S را $\mathbf{r}$ و در چارچوبِ S'، $\mathbf{r}'$ می‌گیریم. این دو توسطِ ماتریسِ R به هم مربوط اند.

$$\mathbf{r} = R\,\mathbf{r}'. \tag{1}$$

طولِ بردارِ مکان در دو چارچوب یکی است. پس

$$\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}'\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}}\tilde{R}R\mathbf{r}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}R = R\tilde{R} = \mathbb{1}, \tag{2}$$

که $\tilde{R}$ ترانهاده‌یِ R است. حالا ببینیم تغییراتِ زمانی‌یِ بردارِ مکان در دو چارچوب چه‌گونه به هم مربوط اند.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{r}' + R\dot{\mathbf{r}}' \tag{3}$$

فرض کردیم چارچوبِ S' چسبیده به جسم است، پس $\dot{\mathbf{r}}' = 0$ و

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\ \mathbf{r}' = \dot{R}\tilde{R}\ \mathbf{r} =: \mathcal{A}\mathbf{r}. \tag{4}$$

در این‌جا از $\mathbf{r}' = R^{-1}\mathbf{r} = \tilde{R}\mathbf{r}$ استفاده کرده‌ایم. با مشتق‌گیری از $R\tilde{R} = 1\!\!1$ نتیجه می‌شود

$$\dot{R}\tilde{R} + R\dot{\tilde{R}} = 0. \tag{5}$$

با استفاده از این رابطه نشان می‌دهیم که $\mathcal{A} := \dot{R}\tilde{R}$ ماتریسی پادمتقارن است.

$$\tilde{\mathcal{A}} = R\tilde{\dot{R}} = R\dot{\tilde{R}} = -\dot{R}\tilde{R} = -\mathcal{A} \tag{6}$$

با تعریفِ $\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\mathcal{A}_{jk}$، ماتریسِ $\mathcal{A}$ به شکلِ زیر در می آید

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

و

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathcal{A}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{8}$$

در واقع اثرِ هر تبدیلِ خطی‌ِ پادمتقارن در سه بُعد معادلِ ضربِ خارجی در یک بردار است.
مشتقِ زمانی‌ِ یک بردارِ دل‌خواه، $\mathbf{P} = R\mathbf{P}'$، در دو چارچوبِ S و S' با رابطه‌ِ زیر به هم مربوط اند

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= R\dot{\mathbf{P}}' + \dot{R}\mathbf{P}' \\ &= R\dot{\mathbf{P}}' + \dot{R}\tilde{R}R\mathbf{P}' = R\dot{\mathbf{P}}' + \mathcal{A}\mathbf{P} \\ &= R\dot{\mathbf{P}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \\ &= R\dot{\mathbf{P}}' + R\boldsymbol{\omega}' \times R\mathbf{P}' \\ &= R\left(\dot{\mathbf{P}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}'\right), \end{aligned} \tag{9}$$

که ω' مؤلفه‌هایِ ω در چارچوبِ S' را می‌دهد. در به دست آوردنِ نتیجه از $R\omega' \times R\mathbf{P}' = R(\omega' \times \mathbf{P}')$ استفاده کرده‌ایم. این معادله برایِ تکانه‌یِ زاویه‌ای به صورتِ زیر در می آید[1]

[1] این نتیجه در مراجعِ ۱ تا ۳ با روشِ دیگری به دست آمده‌اند. ره‌یافتِ این مقاله به مسئله شبیهِ روشِ استفاده شده در مرجعِ ۴ است.

$$
\begin{aligned}
N = \dot{\mathbf{L}} &= R\left(\dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}'\right) \\
N' &= \dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}', \qquad (10)
\end{aligned}
$$

که $\mathbf{N}$ مؤلفه‌هایِ گشتاورِ وارد به جسم در چارچوبِ S و $\mathbf{N}'$ مؤلفه‌هایِ گشتاورِ وارد به جسم در چارچوبِ S' است. معادله‌يِ اخیر معادله‌يِ اویلر است. اگر بتوانیم این معادله را حل کنیم مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ای در چارچوبِ چسبیده به جسم به دست می‌آیند. اما محاسبه‌يِ مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ای در چارچوبِ S هنوز کارِ بسیار پیچیده‌ای است. دیدیم که اثرِ $\mathcal{A}$ رویِ هر بردارِ دل‌خواهی مثلِ $\mathbf{P}$ به صورتِ $\mathcal{A}\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$ است. این رابطه را به صورتِ زیر نیز می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{P} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = R\boldsymbol{\omega}' \times R\mathbf{P}' \\
&= R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}'). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

ماتریسِ $\mathcal{A}'$ را با $\mathcal{A}'\mathbf{P}' := \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}'$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{P} &= R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}') = R\mathcal{A}'\mathbf{P}' \\
&= R\mathcal{A}'\tilde{R}\mathbf{P}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

پس $\mathcal{A} = R\mathcal{A}'\tilde{R}$. با استفاده از تعریفِ $\mathcal{A} = \dot{R}\tilde{R}$، $\mathcal{A}'$ را می‌توانیم بر حسب R به دست آوریم

$$
\mathcal{A}' = \tilde{R}\mathcal{A}R = \tilde{R}\dot{R} \quad \text{یا} \quad \dot{R} = R\mathcal{A}'. \qquad (13)
$$

همان‌طور که دیدیم با حلِ معادله‌يِ اویلر علی‌الاصول ω' و به عبارتی $\mathcal{A}'$ به دست می‌آید. معادله‌يِ (13) معادله‌يِ تحولِ زمانی‌يِ R است. با داشتنِ $\mathcal{A}'$ با حلِ این معادله علی‌الاصول ممکن است بتوانیم R و از آن‌جا ω یعنی مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ای‌يِ جسم در چارچوبِ فضا یعنی S، را به دست آوریم. توجه کنید که معادله‌يِ (13) یک معادله‌يِ عمل‌گری است. وقتی که $\mathcal{A}'$ به زمان بستگی دارد، چون $\mathcal{A}'$ ماتریس است، علی‌الاصول $\mathcal{A}'$ در زمان‌هایِ مختلف با هم جابه‌جا نمی‌شوند

$$
[\mathcal{A}'(t_1), \mathcal{A}'(t_2)] \neq 0. \qquad (14)
$$

در دو حالت حلِ معادله‌يِ (13) ساده است. وقتی که $\mathcal{A}'$ ثابت است. در این حالت جوابِ معادله‌يِ (13) به سادگی به دست می‌آید

$$R(t) = R(0)\mathrm{e}^{t\mathcal{A}'}. \tag{15}$$

در حالتی خاصی هم که $[\mathcal{A}'(t_1), \mathcal{A}'(t_2)] = 0$. باشد باز هم حلِ معادله‌ي (13) ساده است. در واقع در این حالت نیز می‌توانیم با $\mathcal{A}'(t)$ مثلِ یک عدد رفتار کنیم و جوابِ معادله عبارت است از

$$R(t) = R(0)\exp\left(\int_0^t \mathcal{A}'(t')\mathrm{d}t'\right). \tag{16}$$

اما در حالت کلی که $\mathcal{A}'$ تابعِ زمان است و در زمان‌هايِ مختلف نمایشِ آن ماتریس‌هایی است که با هم جابه‌جا نمی‌شوند، جوابِ معادله‌يِ (13) به صورتِ زیر می‌شود

$$R(t) = R(0)\ \mathrm{Texp}\left(\int_0^t \mathcal{A}'(t')\mathrm{d}t'\right) \tag{17}$$

منظور از Texp عمل‌گرِ زمان‌مرتب است و نمادی برايِ خلاصه‌نویسی است و به صورتِ زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\mathrm{Texp}\left(\int_0^t \mathcal{A}'(t')\mathrm{d}t'\right) &= \\ \sum_k \int_0^t \mathrm{d}t'_1 \int_0^{t'_1} \mathrm{d}t'_2 \quad \cdots \quad &\int_0^{t'_{k-1}} \mathrm{d}t'_k \mathcal{A}'(t'_1)\mathcal{A}'(t'_2)\cdots\mathcal{A}'(t'_k)\end{aligned} \tag{18}$$

اگر بتوانیم این انتگرالِ زمان‌مرتب را بگیریم می‌توانیم ماتریسِ R که همه‌يِ اطلاعات در موردِ حرکتِ جسمِ دوّار دارد را به دست آوریم. در ضمن در پيِ آن می‌توانیم ω یعنی مؤلفه‌هايِ سرعتِ زاویه‌ای در چارچوبِ فضا نیز را به دست آوریم. اما عملاً این جواب صوری است و کارِ زیادی نمی‌توانیم با آن انجام دهیم. دربخشِ بعد یک مثالِ ساده که دورانِ آزادِ جسمِ متقارن است را بررسی می‌کنیم.

۲ مثال— دورانِ آزادِ جسمِ متقارن

منظور از دورانِ آزاد، دورانِ جسم در غیابِ گشتاورِ خارجی است. محورهايِ چارچوبِ S' را محورهايِ اصلی‌يِ جسم می‌گیریم، به طوری که محورِ 3 محورِ تقارنِ جسم باشد. در این صورت معادله‌يِ (10) برايِ جسمِ متقارن به صورتِ زیر در می آید

$$I_1\dot{\omega}'_1 + \omega'_2\omega'_3(I_3 - I_1) = 0,$$

$$I_1\dot{\omega}'_2 + \omega'_1\omega'_3(I_1 - I_3) = 0,$$
$$I_3\dot{\omega}'_3 = 0. \tag{19}$$

I_i لختیِ دورانیِ جسم حولِ محورِ i است. از این معادلات نتیجه می‌شود که ω'_3 ثابت است و بردارِ ω' حولِ محورِ 3 با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ α می‌چرخد.

$$\omega'_1 = B\cos\alpha t,$$
$$\omega'_2 = B\sin\alpha t,$$
$$\omega'_3 = C, \tag{20}$$

که B، C مقادیرِ ثابتی هستند که از شرایطِ اولیه به دست می‌آیند و $\alpha = \dfrac{C(I_3 - I_1)}{I_1}$. ماتریسِ $\mathcal{A}'$ به شکلِ زیر می‌شود

$$\mathcal{A}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -C & B\sin\alpha t \\ C & 0 & -B\cos\alpha t \\ -B\sin\alpha t & B\cos\alpha t & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$\mathcal{A}'$ تابعی از زمان است. دیدیم که حلِ مسئله به روشِ مستقیم برایِ وقتی که $\mathcal{A}'$ تابعِ زمان است پیچیده بود. اما هنوز می‌توانیم مسئله را با انتخابِ چارچوبِ مناسب به شکلِ ساده‌تری حل کنیم. در چارچوبِ S'' که با سرعتِ زاویه‌ایِ $\alpha\hat{k}'$ به دورِ S' می‌چرخد، بردارِ سرعتِ زاویه‌ای ثابت است. مؤلفه‌هایِ سرعتِ زاویه‌ای در این چارچوب عبارت‌اند از

$$\boldsymbol{\omega}''_1 = B,$$
$$\boldsymbol{\omega}''_2 = 0,$$
$$\boldsymbol{\omega}''_3 = C. \tag{22}$$

ماتریسِ تبدیلی که چارچوبِ S'' و S را به هم مربوط می‌کند $\mathcal{R} := RR_3$ است که R_3 عبارت است از

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

اثرِ تبدیلِ R_3 رویِ هر بردارِ ثابت چرخاندنِ آن با سرعتِ زاویه‌ایِ α است. در ضمن به طورِ مستقیم هم می‌توانیم نشان دهیم که

$$\mathcal{A}_3 := \tilde{R}_3\dot{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

بیایید معادله‌ي تحولِ زمانی‌ي $\mathcal{R}$ را به دست آوریم

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}} &= \dot{R}R_3 + R\dot{R}_3 \\ &= R\mathcal{A}'R_3 + RR_3\mathcal{A}_3 \\ &= RR_3(\tilde{R}_3\mathcal{A}'R_3 + \mathcal{A}_3) \\ &= \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{A}_3). \end{aligned} \tag{25}$$

در این‌جا از (13،24) استفاده کرده‌ایم و

$$\bar{\mathcal{A}} := \tilde{R}_3\mathcal{A}'R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -C & 0 \\ C & 0 & -B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

بنا بر این معادله‌ي تحولِ $\mathcal{R}$ با $\mathcal{A}''$ داده می‌شود که ماتریسی ثابت است

$$\dot{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\mathcal{A}'', \quad \mathcal{A}'' := \bar{\mathcal{A}} + \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -C-\alpha & 0 \\ C+\alpha & 0 & -B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

پس

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(0)\mathrm{e}^{t\mathcal{A}''}, \quad \Rightarrow \quad R(t) = R(0)R_3(0)\mathrm{e}^{t\mathcal{A}''}\tilde{R}_3(t) \tag{28}$$

با انتخابِ $R(0) = \mathbb{1}$،

$$R(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}''}\begin{pmatrix} \cos\alpha t & \sin\alpha t & 0 \\ -\sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

پس از آن‌که شکلِ صریحِ $R(t)$ را به دست آوردیم با استفاده از $\mathcal{A}(t) = \dot{R}\tilde{R}$، شکلِ صریحِ $\mathcal{A}(t)$ و بالاخره $\omega(t)$ را می‌توانیم به دست آوریم. براي انجامِ این کار لازم است $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}''}$ را به دست آوریم. اگر ماتریسِ قطری‌کننده‌ي $\mathcal{A}''$ را U بگیریم

$$\begin{aligned}\mathcal{A}''_D : &= U^\dagger\mathcal{A}''U, \\ U &= \frac{1}{Y\sqrt{2}}\begin{pmatrix} iX & B\sqrt{2} & -iX \\ Y & 0 & Y \\ -iB & X\sqrt{2} & iB \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{30}$$

که $X := C + \alpha$، $Y := \sqrt{(C+\alpha)^2 + B^2}$. مقادیرِ ویژه‌ي $\mathcal{A}''$ یا در واقع اعضاي قطرِ $\mathcal{A}''_D$، $\pm iY$ و صفر هستند. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{t\mathcal{A}''} &= \sum_k \frac{(t\mathcal{A}'')^k}{k!} \\
&= U\sum_k \frac{(tU^\dagger \mathcal{A}'' U)^k}{k!} U^\dagger \\
&= U\sum_k \frac{(t\mathcal{A}''_D)^k}{k!} U^\dagger \\
&= U \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{itY} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-itY} \end{pmatrix} U^\dagger,
\end{aligned} \tag{31}
$$

که با محاسبه‌یِ مستقیم منجر می‌شود به

$$
\mathrm{e}^{t\mathcal{A}''} = \frac{1}{Y^2} \begin{pmatrix} X^2\cos(Yt) + B^2 & -XY\sin(Yt) & XB(1-\cos(Yt)) \\ XY\sin(Yt) & Y^2\cos(Yt) & -YB\sin(Yt) \\ XB(1-\cos(Yt)) & YB\sin(Yt) & X^2 + B^2\cos(Yt) \end{pmatrix}. \tag{32}
$$

و بالاخره با جاگذاری در $R(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}''}R_3(t)$، $R(t)$ به دست می آید. مؤلفه‌هایِ بردارِ سرعتِ زاویه‌ای $\omega(t)$ در چارچوبِ ثابت در فضا از $\mathcal{A}(t) = \dot{R}\tilde{R}$، به دست می آیند.

$$
\begin{aligned}
&\omega_x(t) = B + \frac{\alpha(C+\alpha)B}{(C+\alpha)^2+B^2}(1-\cos(t\sqrt{(C+\alpha)^2+B^2})) \\
&\omega_y(t) = -\frac{\alpha B}{\sqrt{(C+\alpha)^2+B^2}}\sin(t\sqrt{(C+\alpha)^2+B^2}) \\
&\omega_z(t) = (C+\alpha) + \frac{\alpha}{(C+\alpha)^2+B^2}((C+\alpha)^2 \\
&\quad +B^2\cos(t\sqrt{(C+\alpha)^2+B^2}))
\end{aligned} \tag{33}
$$

ثابت‌هایِ C و B که به ثابت‌هایِ اولیه مربوط اند را بر حسبِ مؤلفه‌های اولیه‌یِ سرعتِ زاویه‌ای در چارچوبِ فضا نیز می‌توانیم بنویسیم.

$$
B = \omega_x(0), \quad C(1 + \frac{2(I_3 - I_1)}{I_1}) = \omega_z(0). \tag{34}
$$

این مسئله را با استفاده از زوایایِ اویلر نیز می‌توان حل کرد.

۳ مراجع

[1] Landau, L.D., Lifshitz E. M., 3rd edition, Pergamon Press.

[2] Goldstein, H., Classical Mechanics, 3rd edition, Addison-Wesley.

[3] Symon, K. R., Mechanics, 4th edition, Addison-Wesley.

[4] Arnold V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd edition, Springer-Verlog.