تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی

امیر آقامحمدی

چکیده— این مقاله مروری مقدماتی است در موردِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی.

۱ مقدمه

تا جایی‌که نتیجه‌یِ پژوهش‌هایِ تجربی نشان می‌دهد تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی تا کنون مشاهده نشده. هرچند مواردی وجود دارد که ادعا شده تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی را مشاهده کرده‌اند، [1]، اما این ادعاها هیچ‌گاه تأیید نشدند. به لحاظِ نظری نه تنها مانعی برایِ وجود آن‌ها نیست، بل‌که بعضی‌ها(مثلاً شویینگر[1] [2]) اعتقاد دارند ممکن است این ذرات وجود داشته باشند و نقشِ مهمی هم در تکوینِ عالم ایفا کنند. معادله‌یِ ماکسولِ عادی طوری نوشته شده که تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی وجود ندارد، اما معادله‌هایِ ماکسول را می‌توان طوری تعمیم داد که بار وجریانِ مغناطیسی را هم شامل شود. نظریه‌هایِ مختلفی هم وجود دارد که پیش نهاد می‌کنند تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی وجود داشته باشد. ما در این مقاله می‌خواهیم با تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی آشنا شویم. تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی در بعضی از کتاب‌ها از جمله مراجعِ [5-2] بررسی شده‌اند.

۲ تعمیمِ معادله‌هایِ ماکسول

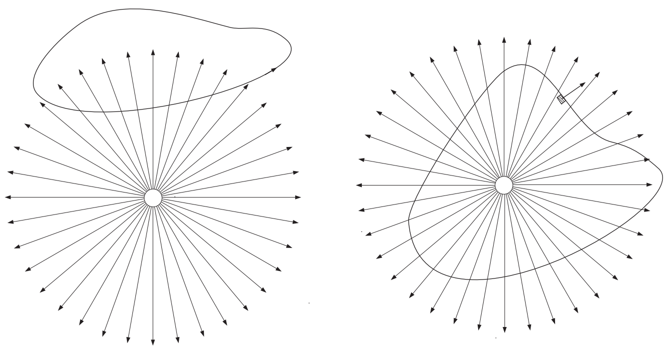
میدانِ الکتریکی‌یِ ناشی از یک بارِ نقطه‌ای با بارِ الکتریکی‌یِ q که در مبدأ ساکن است در نقطه‌یِ $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (1)$$

به بارِ q تک‌قطبی‌یِ الکتریکی می‌گوییم. انتگرالِ این میدان رویِ سطحِ بسته‌یِ S و رویِ خمِ بسته‌یِ C عبارت است از

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \frac{q_S}{\epsilon_0}$$

[1] Schwinger



شکل ۱:

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0. \qquad (2)$$

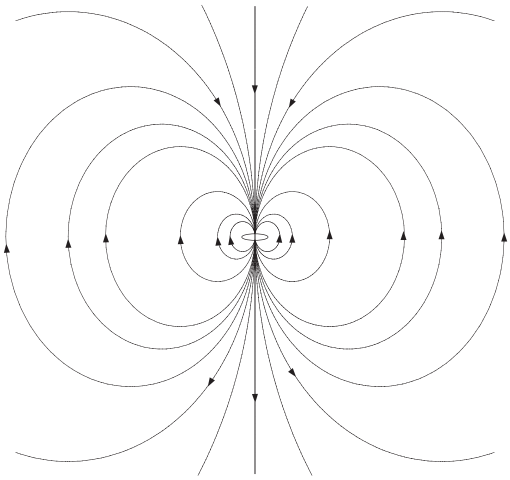
اگر بارِ q درونِ سطحِ بسته‌ی S باشد $q_S = q$ و در صورتی که خارجِ آن باشد $q_S = 0$. $\mathbf{n}$ بردارِ یکه‌ی عمود بر سطحِ S و به سمتِ خارجِ این سطحِ بسته است. $\mathrm{d}S$ عنصرِ سطح روی سطحِ بسته‌ی S و $\mathrm{d}\mathbf{l}$ عنصرِ طول روی خمِ بسته‌ی C است.

اگر به جای یک بارِ الکتریکی‌ی نقطه‌ای، تعدادی بار یا توزیعِ پیوسته‌ای از بارِ الکتریکی‌ی ساکن داشته باشیم، میدانِ الکتریکی‌ی کلِ این مجموعه، $\mathbf{E}$ جمعِ برداری‌ی میدانِ حاصل از تک‌تکِ این عنصرهای بار است. برای این مجموعه‌ی بارهای ساکن نیز روابطِ (2) برقرار است. در این موردِ q_S کلِ باری است که درونِ سطحِ بسته‌ی S است. دو رابطه‌ی انتگرالی‌ی (2) را به شکلِ دیفرانسیلی‌ی زیر می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \qquad (3)$$

ρ چگالی‌ی بارِ الکتریکی است. شکلِ دیفرانسیلی‌ی (3) یک معادله‌ی نقطه‌ای است. در شکلِ انتگرالی ما رابطه‌ای برای جمعِ میدانِ الکتریکی در نقاطِ مختلف داریم، اما در رابطه‌ی دیفرانسیلی ما معادله‌ای برای مشتقاتِ میدان در یک نقطه داریم. بارهای الکتریکی‌ی متحرک جریانِ الکتریکی می‌سازند و جریانِ الکتریکی چشمه‌ی میدانِ مغناطیسی است. میدانِ مغناطیسی به طریقِ دیگری هم تولید می‌شود. بعضی از مواد هستند که خاصیت آهن‌ربایی دارند و میدانِ مغناطیسی ایجاد می‌کنند. خطوطِ میدانِ



شکل ۲:

مغناطیسیِ یک حلقه‌یِ جریانِ کوچک را در شکل می‌بینید. خطوطِ میدانِ مغناطیسی‌یِ یک آهنربایِ کوچک هم تقریباً همین شکلی است. اگر آهنربا را بشکنیم و کوچک‌تر کنیم باز هم خطوطِ میدانِ مغناطیسی‌یِ به طورِ کیفی به همین شکل است. در واقع درونِ آهن‌ربا هم حلقه‌هایِ جریان بسیار کوچکی در ابعادِ اتمی چشمه‌یِ میدانِ مغناطیسی هستند. همان‌طور که در شکل می‌بینیم خطوطِ میدانِ مغناطیسی از یک‌سرِ آهن‌ربا خارج و به سرِ دیگر وارد می‌شوند. از تجربه نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = 0. \qquad (4)$$

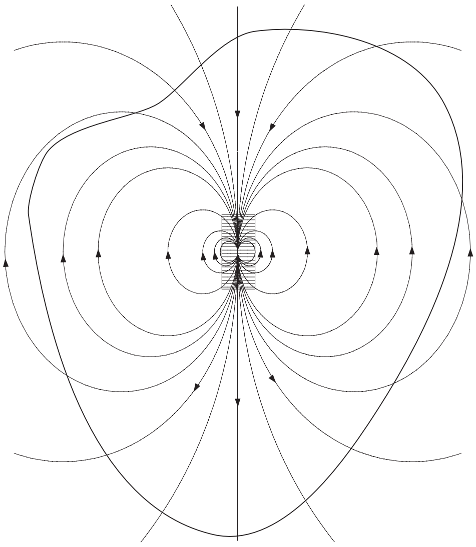
یعنی چیزی شبیهِ تک قطبی‌یِ الکتریکی که چشمه‌یِ میدانِ مغناطیسی باشد تا کنون مشاهده نشده است.

اگر جریانِ الکتریکی‌یِ I که از درونِ حلقه‌یِ بسته‌یِ C می‌گذرد پایا باشد

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I. \qquad (5)$$

روابطِ انتگرالی‌یِ (5) و (4) را به صورتِ دیفرانسیلی‌یِ زیر می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$



شکل ۳:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{6}$$

که $\mathbf{J}$ چگالیِ جریان است. همین طور که می‌بینیم میدانِ الکتریکی توسطِ بارهایِ الکتریکی و میدانِ مغناطیسی توسطِ بارهایِ الکتریکیِ متحرک تولید می‌شوند. حالا اگر ذره‌ای با بارِ q تحتِ تأثیر این میدان‌ها قرار گیرد، نیرویِ وارد بر آن که نیرویِ لورنتز نامیده می‌شود عبارت است از

$$F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{7}$$

در صورتی که مسئله پایا نباشد معادلاتِ (6) و (2) به صورتِ زیر در می آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{8}$$

در صورتی که بار و جریانِ الکتریکی وجود نداشته باشد، $\rho = 0$، $\mathbf{J} = 0$ در معادله‌هایِ بالا تقارتی بینِ میدانِ الکتریکی $\mathbf{E}$ و میدانِ مغناطیسی $\mathbf{B}$ دیده می شود. اگر $\mathbf{E}$ را به $c\mathbf{B}$ و هم‌زمان $c\mathbf{B}$ را به $-\mathbf{E}$ تبدیل کنیم معادله‌ها عوض نمی‌شوند. توجه داشته باشیم که

$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. اما حضورِ بار و جریانِ الکتریکی این تقارن را می‌شکند. یک سئوالِ طبیعی که می‌تواند مطرح شود این است که آیا بار و جریانِ مغناطیسی وجود دارد؟

یک بارِ نقطه‌ایِ مغناطیسی چشمه‌یِ میدانِ مغناطیسی است و با حضورِ آن معادله‌هایِ ماکسول عوض می‌شوند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{9}$$

همان طور که بقایِ بارِ الکتریکی داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

بارِ مغناطیسی هم پایسته است

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

این معادله‌ها تقارن زیر را دارند

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \to c\mathbf{B}, \quad c\rho_e \to \rho_m, \quad c\mathbf{J}_e \to \mathbf{J}_m, \\ c\mathbf{B} \to -\mathbf{E}, \quad \rho_m \to -c\rho_e, \quad \mathbf{J}_m \to -c\mathbf{J}_e, \end{aligned} \tag{12}$$

یعنی تحتِ این تبدیل‌ها معادله‌هایِ ماکسول عوض نمی‌شوند. در واقع معادله‌هایِ ماکسول تحتِ تبدیلِ بزرگتری متقارن هستند. این تبدیل دوران به اندازه‌یِ θ در فضایِ دو بعدیِ فرضی‌ای که از ($\mathbf{E}$ و $c\mathbf{B}$)، (و همین‌طور ($c\rho_e$ و ρ_m) و ($c\mathbf{J}_e$ و $\mathbf{J}_m$)) ساخته می‌شود است.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ c\mathbf{B}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ c\mathbf{B} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c\rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c\mathbf{J}'_e \\ \mathbf{J}'_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}_m \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

مثلاً

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{E}' \\ \nabla \cdot c\mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{E} \\ \nabla \cdot c\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_e/\epsilon_0 \\ c\mu_0\rho_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \rho'_e/\epsilon_0 \\ c\mu_0\rho'_m \end{pmatrix} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

تبدیلِ (12) به ازایِ $\theta = \pi/2$ به دست می‌آید. چگالی‌یِ انرژی‌یِ میدانِ الکترومغناطیسی که از معادله‌هایِ ماکسول به دست می‌آید، هم تحتِ این تبدیل ناورداست

$$
u' = \frac{\epsilon_0}{2}|\mathbf{E}'|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}'|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 = u. \qquad (15)
$$

معادله‌یِ (7) برایِ نیرویِ لورنتز را اگر به شکلِ زیر برایِ ذره‌ای با بارِ الکتریکی‌یِ q_e و بارِ مغناطیسی‌یِ q_m تعمیم دهیم به معادله‌یِ زیر می‌رسیم

$$
F = q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_m(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}). \qquad (16)
$$

نیرویِ $\mathbf{F}$ تحتِ تبدیلِ (14) ناورداست، یعنی

$$
\begin{aligned}
F' &= q'_e(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}') + q'_m(\mathbf{B}' - \mathbf{v} \times \mathbf{E}') \\
&= q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_m(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

حالا ببینیم معنایِ تبدیلِ (14) چیست. اگر تمامِ بارهایِ دنیا تحتِ این تبدیل عوض شوند، اندازه‌یِ بارهایِ الکتریکی و مغناطیسی و هم‌چنین میدان‌هایِ الکتریکی و مغناطیسی عوض می‌شوند، اما آن‌چه مشاهده‌پذیر است خود میدان‌ها نیستند بل‌که نیرویی است که به ذره‌یِ بارداری وارد می‌شود. اما این نیرو تحتِ تبدیلِ (14) عوض نمی‌شود. پس اندازه‌یِ بارهایِ الکتریکی و مغناطیسی واقعاً مشاهده‌پذیر نیستند. باید یک پیمانه‌یِ خاص انتخاب کنیم مثلاً این‌که الکترون ذره‌ای است که بارِ الکتریکی‌اش -1.6×10^{-19} C و بارِ مغناطیسی‌اش صفر است. تبدیلِ پیمانه معادلِ تبدیلِ (14) است.

$$
\begin{aligned}
-ce &= cq_e\cos\alpha + q_m\sin\alpha, \\
0 &= -cq_e\sin\alpha + q_m\cos\alpha \qquad (18)
\end{aligned}
$$

در واقع ممکن هم هست که بگوییم الکترون ذره‌ای است که بارِ الکتریکی و مغناطیسی‌اش عبارت اند از

$$
q_e = -e\cos\alpha, \quad q_m = -ce\sin\alpha. \qquad (19)
$$

اگر نسبتِ q_e/q_m براي همه‌ي ذراتِ دنیا یکی باشد با یک تبدیل پیمانه‌ای با $\alpha = \arctan(cq_e/q_m)$ می‌توان بارِ مغناطیسی‌یِ همه‌یِ ذرات را صفر کرد. در پیمانه‌ای که بارِ مغناطیسی‌یِ الکترونِ صفر است، اندازه‌يِ بارهايِ الکتریکی و مغناطیسی‌یِ بقیه‌يِ ذرات معین می‌شود. مثلاً با توجه به این‌که شدتِ میدانِ مغناطیسی رويِ سطحِ زمین 1 گاوس است با دقتِ 10^{-20}، بارِ مغناطیسی‌يِ پروتون صفر و بارِ الکتریکی‌اش 1.6×10^{-19} C است. در این پیمانه‌يِ خاص اگر بارِ مغناطیسی‌يِ همه‌يِ ذرات صفر باشد، به همان معادلات مرسوم ماکسول می‌رسیم. بنا بر این سئوالِ وجودِ تک‌قطبی‌يِ مغناطیسی‌يِ شاید واقعاً معنا نداشته باشد و این‌کار در واقع معادلِ پیدا کردنِ ذره‌ای در جهان است که نسبتِ بارِ الکتریکی به مغناطیسی‌اش با بقیه‌يِ ذراتِ دنیا فرق داشته باشد. به ذراتی که هم بارِ الکتریکی و هم بارِ مغناطیسی داشته باشند دایون[2] گفته می‌شوند. دیراک اولین کسی بود که توجیهی نظری برايِ وجودِ تک‌قطبی‌يِ مغناطیسی ارائه داد. یکی از سئوال‌هايِ فیزیک‌پیشه این است که "چرا بارهایی الکتریکی که تا کنون مشاهده شده‌اند کوانتیزه هستند؟" چرا همه‌يِ بارها متناسب با e اندازه‌يِ بارِ الکترون هستند؟ حالا ممکن است بارِ بنیادی‌يِ طبیعت را بارِ کوارک‌ها یعنی $e/3$ بگیریم. توجیهِ دیراک به این سئوال هم مربوط می‌شود. او نشان داد اگر فقط یک تک قطبی‌يِ مغناطیسی هم در طبیعت یافت شود کوانتشِ تکانه‌يِ زاویه‌ای‌يِ مجموعه‌ای شاملِ این تک‌قطبی‌يِ مغناطیسی و یک بارِ الکتریکی مثلاً الکترون منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود

$$eq_m = \frac{n\hbar}{2c}, \tag{20}$$

که q_m بارِ تک قطبی‌يِ مغناطیسی و n عددی صحیح است. بنا بر این همه‌يِ بارهايِ الکتریکی در طبیعت باید ضریبِ صحیحی از یک مقدارِ معین باشند. همین استدلال می‌گوید بارهايِ مغناطیسی هم باید کوانتیزه باشند. اگر بارِ الکترون را پایه بگیریم با فرضِ $n = 1$، $q_m = \hbar c/(2e) = 137e/2 = 67.5e$. ضریبِ جفت‌شدگی‌يِ الکترومغناطیس $\alpha_e = e^2/(\hbar c) = 1/137$ است. ضریبِ متناظرِ آن برايِ تک‌قطبی‌يِ مغناطیسی $\alpha_m = q_m^2/(\hbar c) = 34.25$ می‌شود. بنابراین از روش‌هايِ اختلالی نمی‌توان استفاده کرد.

بر مبنايِ فیزیکِ کلاسیک اگر بخواهیم تخمینی برايِ جرمِ تک‌قطبی‌يِ مغناطیسی داشته باشیم باید فرض‌هایی بکنیم. بر مبنايِ این فرض‌ها جواب‌هايِ متفاوتی به دست می‌آید. اگر شعاعِ کلاسیکِ تک‌قطبی‌يِ مغناطیسی را همان شعاعِ کلاسیک الکترون بگیریم

$$r_m = r_e, \qquad \Rightarrow \quad \frac{q_m^2}{m_m c^2} = \frac{e^2}{m_e c^2}$$

[2] Dyon

$$m_m = \frac{q_m^2 m_e}{e^2} = 2.4\ \mathrm{GeV/c^2} \tag{21}$$

در نظریه‌هایِ وحدت یافته‌یِ بزرگ ([3]GUT) در شکستِ خودبه‌خودِ تقارنِ گروهِ وحدت‌یافته‌یِ بزرگ به زیرگروه‌هایِ خود وجودِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی هم پیش‌نهاد می‌شود. بر مبنایِ این نظریه‌ها جرمِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی از مرتبه‌یِ $10^{16} - 10^{17}\ \mathrm{GeV/c^2}$ است. بنا بر این اگر این نظریه‌ها درست باشند نباید انتظار داشته باشیم که در شتاب‌دهنده‌ها تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی هم تولید شود. ممکن است در ثانیه‌هایِ اولِ خلقِ جهان این ذرات تولید شده باشند. چون بارِ مغناطیسی هم بقاء دارد، این ذرات پایدار هستند و ممکن است در تابش‌هایِ کیهانی بتوان آن‌ها را آشکار کرد. زمانی در معدن‌هایِ موادِ مغناطیسی هم به دنبالِ این ذرات می‌گشتند. وقتی از ماه سنگ‌هایی به زمین آورده شدند، یکی از آزمایش‌ها بررسی‌یِ آن‌ها از نظرِ وجودِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی‌یِ بود. اما جزِ یک مورد که آن‌هم تأیید نشد هیچ آزمایشِ تاییدشده‌ای در موردِ آشکارسازی‌یِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی وجود ندارد.

۳ یک مثال: حرکتِ یک‌بارِ الکتریکی در حضورِ یک تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی

پوانکاره در سالِ ۱۸۹۶ مسئله‌یِ حرکتِ یک ذره که بارِ الکتریکی دارد را در حضورِ یک تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی حل کرد. فرض کنید بارِ الکتریکی‌یِ q به جرمِ m در حضورِ بارِ مغناطیسی‌یِ q_m که در مبدأ ساکن است، حرکت می‌کند. بارِ مغناطیسی را آن‌قدر سنگین فرض کنیم به طوری که بتوانیم از حرکتِ آن چشم‌پوشی کنیم. میدانِ مغناطیسی‌یِ ناشی از بارِ مغناطیسی‌یِ q_m، شبیهِ میدانِ الکتریکی‌یِ ناشی از یک بارِ نقطه‌ای‌یِ الکتریکی است

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m \mathbf{r}}{r^3}. \tag{22}$$

معادله‌یِ حرکتِ بارِ q، عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r^3}\ \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}. \tag{23}$$

اگر دو طرفِ رابطه‌یِ (23) را در $\dot{\mathbf{r}}$ ضرب کنیم نتیجه می‌شود $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0$. البته این مطلب واضح است زیرا نیرویِ مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد و انرژی جنبشی و در نتیجه اندازه‌یِ سرعتِ ذره ثابت می‌ماند. بردارِ $\mathbf{J}$

[3] Grand Unified Theories

$$\mathbf{J} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\mathbf{r}. \tag{24}$$

هم ثابت حرکت است.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{J}} &= m\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 q q_m \dot{r}}{r^2}\mathbf{r} \\
&= \mathbf{r}\times\left(\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r^3}\ \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}\right) - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 q q_m \dot{r}}{r^2}\mathbf{r} \\
&= \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r^3}\left(\dot{\mathbf{r}}\ r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\right) - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 q q_m \dot{r}}{r^2}\mathbf{r} = 0. \tag{25}
\end{aligned}$$

$\mathbf{J}$ برداری است که جهت و اندازه‌اش به شرایطِ اولیه بستگی دارد و با حرکتِ ذره ثابت می‌ماند. $\mathbf{J}$ از جمعِ دو بردارِ عمود بر هم ساخته شده، مثلِ وتر در مثلثِ قائم‌الزاویه، پس اندازه‌اش باید از اندازه‌یِ هردو بزرگ تر باشد. پس $J > \frac{|\mu_0 q q_m|}{4\pi}$. با استفاده از (24) داریم

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{J} = rJ\cos\theta = -\frac{\mu_0 q q_m r}{4\pi}, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi J}. \tag{26}$$

پس ذره در مسیری حرکت می‌کند که زاویه‌یِ بینِ بردارِ مکان با بردارِ ثابتِ $\mathbf{J}$ ثابت می‌ماند. پس ذره رویِ رویه‌ای به شکلِ مخروط حرکت می‌کند. زاویه‌یِ نیم‌رأسِ مخروط، θ، به شرایطِ اولیه بستگی دارد. با استفاده از بردارِ $\mathbf{J}$، سرعت را می‌توان از معادله‌یِ حرکت، (23)، حذف کرد

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi m r^3}(\mathbf{J} + \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\mathbf{r}) \tag{27}$$

اگر بردارِ مکان را به دو بخشِ $\mathbf{r}_\parallel$ و $\mathbf{r}_\perp$ تجزیه می‌کنیم،

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{J}})\hat{\mathbf{J}} \\
&\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{J}})\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}\times(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{J}}). \tag{28}
\end{aligned}$$

معادله‌یِ حرکتِ $\mathbf{r}_\parallel$ و $\mathbf{r}_\perp$ عبارت اند از

$$\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{r}}_\perp &= -\frac{q^2 q_m^2}{16\pi^2 m r^4}\mathbf{r}_\perp \\
m\ddot{\mathbf{r}}_\parallel &= -\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi m r^3}(\mathbf{J} + \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\mathbf{r}_\parallel). \tag{29}
\end{aligned}$$

$r_{\|} = r\cos\theta$ و $r_\perp = r\sin\theta$. چون ذره رویِ مخروط حرکت می‌کند اگر $\mathbf{r}_\perp$ را داشته باشیم مکانِ ذره عملاً معین است. بیایید تحولِ $\mathbf{r}_\perp$ را بررسی کنیم.

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\perp = -\frac{q^2 q_m^2 \sin^4\theta}{16\pi^2 m r_\perp^4}\mathbf{r}_\perp \tag{30}$$

اگر رابطه‌یِ (24) را در $\hat{\mathbf{J}}$ ضربِ داخلی کنیم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} J &= m\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{r} \\ J &= m\dot{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{J}}\times\mathbf{r} + J\cos^2\theta \\ Jsin^2\theta &= m(\dot{\mathbf{r}}_\| + \dot{\mathbf{r}}_\perp)\cdot\hat{\mathbf{J}}\times\mathbf{r}_\perp \\ Jsin^2\theta &= m\dot{\mathbf{r}}_\perp\cdot\hat{\mathbf{J}}\times\mathbf{r}_\perp \\ Jsin^2\theta &= m\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{r}_\perp\times\dot{\mathbf{r}}_\perp. \end{aligned} \tag{31}$$

در این‌جا از $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ استفاده کرده‌ایم. پس

$$m\dot{\mathbf{r}}_\perp\times\mathbf{r}_\perp = \mathbf{J}sin^2\theta \tag{32}$$

اگر محورِ z را $\hat{\mathbf{J}}$ بگیریم $\mathbf{r}_\perp = \rho$. حلِ مسئله تبدیل می‌شود به حلِ یک مسئله با نیرویِ مرکزی‌یِ که با ρ^{-3} متناسب است و تکانه‌زاویه‌ای هم $\mathbf{J}\sin^2\theta$ ثابتِ حرکت است.

$$\begin{aligned} &m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\frac{q^2 q_m^2 \sin^4\theta}{16\pi^2 m\rho^3} \\ &m\rho^2\dot{\phi} = Jsin^2\theta. \end{aligned} \tag{33}$$

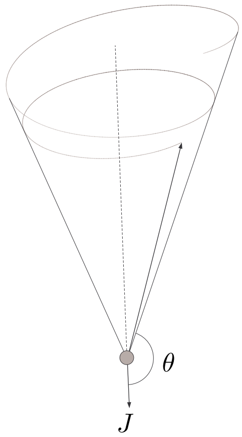
که از این‌جا نتیجه می‌شود

$$m\ddot{\rho} + \frac{\sin^4\theta}{m\rho^3}\left(\frac{q^2 q_m^2}{16\pi^2} - J^2\right) = 0. \tag{34}$$

بیایید از همانِ روشی که در حلِ مسائلِ نیروهایِ مرکزی مرسوم است، استفاده کنیم. با تعریفِ $u := 1/\rho$ و استفاده از $u^2 = m\dot{\phi}/(Jsin^2\theta)$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{Jsin^2\theta}{m}\frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = -\frac{Jsin^2\theta}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \\ \ddot{\rho} &= -\frac{J^2 sin^4\theta}{m^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

با استفاده از این‌ها نتیجه می‌شود



شکل ۴: مسیرِ یک‌بارِ در حضورِ یک تک‌قطبی‌ِ مغناطیسی

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\sin^2\theta = 0 \tag{36}$$

و از این‌جا

$$u = A\cos[(\phi - \phi_0)\sin\theta)]. \tag{37}$$

با انتخابِ مناسبِ محورهایِ مختصات می‌توانیم ϕ_0 را صفر انتخاب کنیم. بالاخره مسیرِ بارِ الکتریکی در حضورِ تک‌قطبی‌ِ مغناطیسی به دست می آید

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{\cos[\phi\sin\theta)]}, \\ z &= \rho\cot\theta. \end{aligned} \tag{38}$$

وقتی بارِ الکتریکی به اندازه‌یِ $\phi = \pi/(2\sin\theta)$ دورِ بردارِ $\mathbf{J}$ بچرخد، به فاصله‌یِ بی‌نهایت‌دور از تک قطبی‌ِ مغناطیسی رسیده.

۴ مراجع

[1] Price P. B., Shirk E. K., Osborne W. Z., & Pinsky S., Phys. Rev. Lett. **35**, 487 (1975); Cabrera B., Phys. Rev. Lett. **48**, 1378 (1982).

[2] Schwinger J., DeRaad L. L., Milton K. A., Tsai W., Classical Electrodynamics, Perseus Books.

[3] Griffiths D. J., Introduction to Electrodynamics, 3rd edition, Prentice Hall.

[4] Greiner W., Classical Electrodynamics, Springer.

[5] Jackson J. D., Introduction to Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc.