

مسئله 1) فرض کنید X_a و K_a ($a = 1, 2, 3$) شش عمل گر خطی باشند که جابه جاگرهای بین آنها به قرار زیر است

$$[X_a, K_b] = \delta_{ab}.$$

δ_{ab} دلتای کرونکر است.

الف) آیا نمایش ماتریسی با بُعد محدود برای عمل گرهای X_a و K_a وجود دارد؟ توضیح دهید.

ب) جابه جاگرهای زیر را حساب کنید (n عدد طبیعی است):

$$a) [(X_a)^n, K_b] = \quad b) [X_a, (K_b)^n] =$$

مسئله 2) دو دسته معادله ی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} A|f_n\rangle = \lambda_n|g_n\rangle, & n = 1, 2, \dots, N \\ \tilde{A}|g_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle, & n = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

A ماتریسی حقیقی است.

الف) ویژه توابع و ویژه مقادیر $\tilde{A}A$ کدام اند؟

ب) ویژه توابع و ویژه مقادیر $AA\tilde{A}$ کدام اند؟

ج) آیا ویژه توابع $AA\tilde{A}$ متعامد هستند؟ آیا ویژه مقادیر $\tilde{A}A$ حقیقی هستند؟

د) ماتریس A را به صورت زیر بسط داده شده است.

$$A = \sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \langle \beta_n|$$

$|\alpha_n\rangle$ و $|\beta_n\rangle$ را بر حسب $|f_n\rangle$ و $|g_n\rangle$ به دست آورید. $|\alpha_n\rangle$ ، $|\beta_n\rangle$ ، $|f_n\rangle$ و $|g_n\rangle$ را بهنجار بگیرید.

ه) در حالت خاص مقادیر ویژه را $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ و بردارها را به صورت زیر بگیرید

$$|f_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |f_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |g_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ماتریس A را به دست آورید.

مسئله 3) ماتریس B بر حسب بردار D و ماتریس های پائولی به صورت زیر تعریف می شود

$$B = \mathbb{1} - \sigma \cdot D$$

$\mathbb{1}$ ماتریس واحد است. B^{-1} را به دست آورید.

مسئله 4)

الف) ویژه بردارها و ویژه مقادیرهای ماتریس $\sigma \cdot \mathbf{n}$ را به دست آورید.

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{k} \cos \theta.$$

ب) $E(\psi)$ و $F(\psi)$ ضرایب بسط زیر را به دست آورید.

$$\exp\left(\frac{-i\sigma \cdot \mathbf{n}\psi}{2}\right) = E(\psi)\mathbb{1} + F(\psi)\sigma \cdot \mathbf{n}$$

راه نمایی ممکن است این روابط به دردتان بخورد

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c.$$

$$\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a = 2\delta_{ab} \mathbf{1}.$$

موفق باشید