

مسئله‌ی (1)

الف) نامساوی شوارتز - نشان دهید که برای یک جفت بردار  $|a\rangle$  و  $|b\rangle$  که متعلق به فضای ضرب داخلی  $\mathcal{V}$  هستند، نامساوی زیر برقرار است.

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle \langle b|b\rangle.$$

ب) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (x^{10} - x^6 + 5x^4 - 5)e^{-x^4} \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (x^4 - 1)^2 (y^6 + 5)^2 e^{-(x^4+y^4)}}.$$

ج) نشان دهید برای  $n$  عدد مختلط  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  داریم

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n|^2 \leq n(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2).$$

مسئله‌ی (2) تابع‌های مستقل خطی  $x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) را به عنوان پایه‌های مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب مختلط در نظر بگیرید. ضرب داخلی  $f$  و  $g$  در این فضای برداری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle g|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f^*(x)g(x).$$

با استفاده از متعامدسازی گرم-اشمیت چندجمله‌ای‌های متعامد و بهنجار  $e_0(x), e_1(x)$  و  $e_2(x)$  را به دست آورید.

راه‌نمایی - رابطه‌ی زیر ممکن است به دردتان بخورد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x^n = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n = 0 \\ 0 & \text{for odd } n \\ \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2^{n/2}}, & \text{for even } n, n \neq 0 \end{cases}$$

مسئله‌ی (3) اثر عمل‌گر خطی  $\mathbf{T}$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

اثر  $\mathbf{T}^\dagger$  روی یک بردار دلخواه چیست؟

$$\mathbf{T}^\dagger \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$$

مسئله 4) ویژه بردارها و ویژه مقادیرهای ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

مسئله 5) موفق باشید