

به نام خدا

دانشگاه الزهراء - آبان ۸۳

امتحان میان‌ترم اول ریاضی فیزیک I

سؤال 1) B برداری ثابت است. نشان دهید

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (1)$$

سؤال 2) نشان دهید

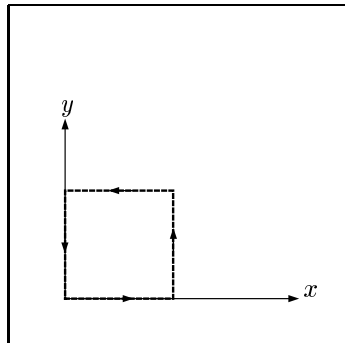
$$\int_S (\mathbf{ds} \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint \mathbf{dr} \times \mathbf{P}. \quad (2)$$

انتگرال سمت راست روی مسیر بسته‌ای است که سطح S را دور می‌زند.

سؤال 3) میدان برداری  $\mathbf{A} = ixy + jy^2 + kxy$  را در نظر بگیرید. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$C_1 = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad C_2 = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} \quad (3)$$

انتگرال‌گیری‌ها روی محیط و سطح مربعی به طول 2 واحد است که مرکز آن در نقطه (1, 1) است.



سؤال 4) با استفاده از قضیه دیورژانس فرم زیر از قضیه گرین را اثبات کنید. V حجمی است که توسط سطح S محصور شده.

$$\oint_S u \nabla w \cdot \mathbf{ds} = \int_V u \nabla^2 w \, dv + \int_V \nabla u \cdot \nabla w \, dv \quad (4)$$

سؤال 5) یک مزون برداری با میدان‌های برداری  $\mathbf{E}$ ،  $\mathbf{H}$ ، و  $\mathbf{A}$  و میدان اسکالر  $\phi$  توصیف می‌شود، که مطابق معادله‌های زیر به هم مربوطند.  $\mu$  مقداری ثابت است.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\mu^2 \phi, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu^2 \mathbf{A}, \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi.\end{aligned}\quad (5)$$

الف) نشان دهید که  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$ .

ب) نشان دهید  $\phi$  در معادله‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

ج) در صورتی که  $\phi$  مستقل از زمان باشد، در معادله‌ی  $\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi = 0$  صدق می‌کند. اگر این معادله درون سطح بسته‌ی  $S$  که حجم  $V$  را در بر می‌گیرد صادق باشد و روی سطح نیز  $\phi = 0$  باشد، نشان دهید که در همه‌ی نقاط  $V$ ،  $\phi = 0$  است.