بسمه تعالی

امتحانِ میان‌ترمِ مکانیکِ آماریِ پیش‌رفته — دانشگاهِ الزهرا— آذرِ ۱۳۸۲

**استفاده از جزوه و هر کتابِ دیگری غیر از کتابِ Pathria ممنوع است.**

۱— گازی شاملِ $N$ اتم به جرمِ $m$ در دمایِ $T$ در پتانسیلِ

$$V(x,y,z) = \begin{cases} ax^2 + by^2 + mgz & z \geq 0 \\ \infty & z \leq 0 \end{cases}$$

قرار دارد.
**الف** — انرژیِ کلِ گاز چه‌قدر است؟
**ب** — ظرفیتِ گرماییِ گاز چه‌قدر است؟

**حل—الف** — در محاسبه‌یِ انرژیِ کل ابتدا انرژیِ متوسطِ هر کدام از اتم‌ها را به دست می‌آوریم. برایِ محاسبه‌یِ انرژیِ متوسطِ هر کدام از اتم‌ها لازم است متوسطِ

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + ax^2 + by^2 + mgz$$

را به دست آوریم. متوسطِ پنج جمله‌یِ اول به سادگی از قضیه‌یِ هم‌پارش به دست می‌آید و متوسطِ جمله‌یِ آخر عبارت است از

$$\overline{mgz} = \frac{\int_0^\infty dz\ mgze^{-\beta mgz}}{\int_0^\infty dz\ e^{-\beta mgz}} = kT$$

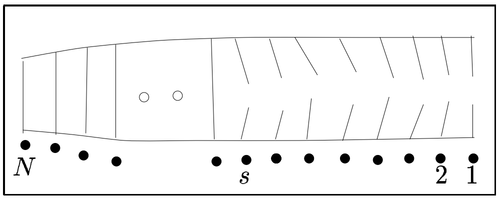
بنا بر این انرژیِ کل عبارت است از

$$U = N\overline{E} = N(kT + 5\frac{kT}{2}) = \frac{7NkT}{2}$$

**ب** —

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{7Nk}{2}$$

۲– یک ملکولِ DNA شاملِ دو رشته اتم است که مطابقِ شکلِ زیر با $N$ اتصال به هم مربوط‌اَند. دمایِ سیستم $T$ است.




هر اتصال تنها وقتی بریده می‌شود که تمامِ اتصال‌هایِ سمتِ راستِ آن بریده شده باشند. ملکولِ نشان داده شده در شکل در حالتِ $s$ اتصالِ بریده است. برایِ بریدن هر اتصال انرژیِ $\epsilon$ لازم است. رابطه‌ای برایِ تعداد متوسطِ اتصال‌هایی که بریده نشده‌اند به دست آورید.

**حل** – به ازایِ هر اتصالِ بریده انرژیِ $\epsilon$ لازم است و حداکثر انرژیِ لازم $N\epsilon$ است. تابعِ پارش عبارت است از

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\epsilon} = \frac{1 - e^{-\beta(N+1)\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}}$$

انرژیِ متوسط برابراست با

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_{n=0}^{N} n\epsilon e^{-\beta n\epsilon} = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} \\ &= \epsilon \frac{(N+1)e^{-\beta(N+1)\epsilon} - Ne^{-\beta(N+2)\epsilon} - e^{-\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2} \end{aligned} \tag{۱}$$

تعدادِ متوسطِ اتصال‌هایِ بریده شده

$$\bar{s} = \frac{\bar{E}}{N} = \frac{(N+1)e^{-\beta(N+1)\epsilon} - Ne^{-\beta(N+2)\epsilon} - e^{-\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2}.$$

و تعدادِ متوسطِ اتصال‌هایِ بریده نشده برابر است با

$$N - \bar{s} = N - \frac{\bar{E}}{N}$$

۳—**الف**— بردار $\vec{\mathbf{A}}$ با طولی ثابت در نظر بگیرید. زاویه‌ای که این بردار با محورِ $x$ می‌سازد را $\theta$ می‌گیریم. فرض کنید $\theta$ کاملاً تصادفی باشد. احتمالِ آن که مولفه‌ی $x$ ِ بردار بینِ $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_x + \mathrm{d}\mathbf{A}_x$ باشد چقدر است؟

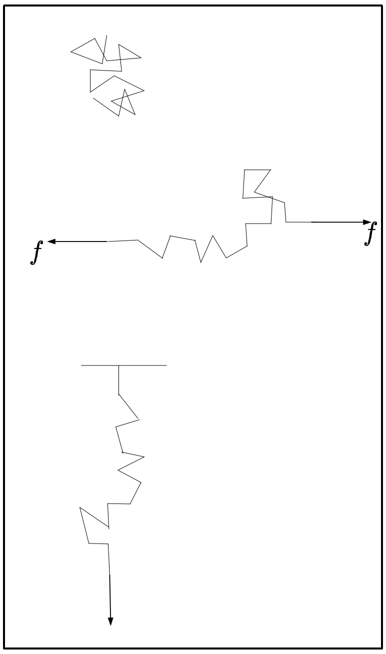
یک زنجیره‌ی پلیمر شاملِ $N \gg 1$ قطعه است که طولِ هر کدام $d$ است. هر قطعه آزادانه می‌تواند دوران کند. دمای سیستم $T$ است.

**ب**— متوسطِ طولِ پلیمر $\overline{R}$ و متوسطِ مجذورِ طولِ پلیمر $\overline{R^2}$ را به دست آورید.

**ج**— فرض کنید در زنجیره‌ی بخشِ قبل نیروی $f$ به دو انتهای آن وارد می‌شود. متوسطِ مجذورِ طولِ پلیمر $\overline{R^2}$ را به دست آورید.

**د**— انتروپی مربوط به بخشِ (ب) را به دست آورید.

**ه**— زنجیره‌ی بخشِ (الف) را از یک سرش در یک میدانِ گرانشی ثابت آویزان کرده‌ایم. جرمِ هر قطعه از پلیمر $m$ است. متوسطِ طولِ پلیمر $\overline{R}$ بر حسبِ دما چیست؟




**حل**— **الف**— در صورتِ مسئله آمده است که $\theta$ کاملاً تصادفی است، بنا بر این احتمالِ آن که زاویه‌ی $\vec{\mathbf{A}}$ با محورِ $x$ بینِ $\theta$ و $\theta + \mathrm{d}\theta$ باشد برابر است با

$$\rho(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}d\theta.$$

اما $\mathbf{A}_x = \mathbf{A}\cos\theta$ است و $\mathrm{d}\mathbf{A}_x = \mathbf{A}\sin\theta\mathrm{d}\theta$. احتمالِ آن که $\mathbf{A}_x$ بینِ $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_x + \mathrm{d}\mathbf{A}_x$ باشد، عبارت است از

$$\Gamma(A_x)dA_x = 2\frac{1}{2\pi}\frac{dA_x}{|A\sin\theta|} = \frac{dA_x}{\pi|A\sin\theta|}.$$

علامتِ قدرِ مطلق براي آن است که احتمال باید مثبت باشد و ضریبِ 2 به خاطرِ آن است که هر مقدارِ $\mathbf{A}_x$ به ازاي دو مقدارِ $\theta$ می‌تواند رخ دهد. مقدارِ متوسطِ $\mathbf{A}_x$ برابر است با

$$\overline{A_x} = \int_0^A A_x \Gamma(A_x) dA_x = \int_0^{2\pi} A \sin\theta \frac{d\theta}{\pi} = 0$$

براي برداری که در دو بعد است

$$\overline{A_x^2} = \frac{1}{2}\overline{A^2} = \frac{1}{2}A^2$$

ب– طولِ کلِ پلیمر $\vec{R}$ برابر است با

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \cdots + \vec{r}_N.$$

و طولِ متوسط پلیمر $\bar{R}$، با جمعِ طولِ متوسطِ همه‌يِ قطعه‌ها برابر است.

$$\overline{\vec{R}} = \overline{\vec{r}_1} + \overline{\vec{r}_2} + \cdots + \overline{\vec{r}_N} = N\overline{\vec{r}}.$$

اما با استفاده از نتیجه‌يِ بخشِ (الف)

$$\overline{\vec{r}} = \hat{i}\ \bar{x} + \hat{j}\ \bar{y} + \hat{k}\ \bar{z} = 0.$$

بنا بر این

$$\overline{\vec{R}} = N\overline{\vec{r}} = 0$$

و

$$\overline{R^2} = Nd^2.$$

ج– انرژيِ پتانسیلِ پلیمر برابر است با

$$V = -\vec{f}\cdot\vec{R} = -f(d\cos\theta_1 + d\cos\theta_2 + \cdots + d\cos\theta_N).$$

تابعِ پارش برابر است با

$$\begin{aligned} Q_N &= \sum_{\{\theta_i\}} \prod_{i=1}^N e^{\beta f d\cos\theta_i} = \prod_{i=1}^N \left[\sum_{\theta_i} e^{\beta f d \cos\theta_i}\right] \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\phi\ \sin\theta d\theta e^{\beta f d\cos\theta}\right)^N \\ &= \left(4\pi\frac{\sinh(\beta f d)}{\beta f d}\right)^N, \end{aligned} \qquad (۲)$$

طولِ متوسط پلیمر $\bar{R}$ از رابطه‌ي زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial f}\ln Q_N = N\langle d\cos\theta\rangle \\ &= Nd\left[\coth(\beta fd) - \frac{1}{\beta fd}\right] = NdL(\beta fd). \qquad (۳)\end{aligned}$$

متوسطِ مجذورِ طولِ پلیمر $\overline{R^2}$ نیز از رابطه‌ي زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\overline{R^2} &= \langle(d\cos\theta_1 + d\cos\theta_2 + \cdots d\cos\theta_N)^2\rangle \\ &= N\langle d^2\cos^2\theta\rangle + 2\frac{N(N-1)}{2}\langle d\cos\theta\rangle^2 \\ &= Nd^2[1 - \frac{2\coth(\beta fd)}{\beta fd} + \frac{2}{\beta^2 f^2 d^2}] \\ &\quad + N(N-1)d^2[\coth(\beta fd) - \frac{1}{\beta fd}]^2 \\ &= Nd^2[1 - \frac{2}{\beta fd}L(\beta fd)] + N(N-1)d^2L^2(\beta fd) \qquad (۴)\end{aligned}$$

در دماهای خیلی کوچک و یا نیروي $f$ِ بزرگ $kT \ll fd$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= Nd \\ \overline{R^2} &= Nd^2, \qquad (۵)\end{aligned}$$

و براي دماهای خیلی بزرگ و یا نیروي $f$ِ کوچک $kT \gg fd$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{\beta Nfd^2}{3} \\ \overline{R^2} &= \frac{Nd^2}{3}, \qquad (٦)\end{aligned}$$

در این محاسبات از بسطِ تابعِ لانژون که در کتابِ Pathria هم بحث آن شده‌است، استفاده کرده‌ایم.

د– انرژيِ آزاد $A$ عبارت است از

$$A = -kT\ln Q_N \quad = -NkT\ln\left(4\pi\frac{\sinh(\beta fd)}{\beta fd}\right), \qquad (۷)$$

و انتروپی از رابطه‌ي زیر به دست می‌آید.

$$S = -(\frac{\partial A}{\partial T})_f = Nk\ln \quad = -NkT\ln\left(4\pi\frac{\sinh(\beta fd)}{\beta fd}\right) - Nk\beta fdL(\beta fd). \qquad (۸)$$

ه– انرژيِ پتانسیلِ گرانشيِ پلیمر عبارت است از

$$V = -NmgZ_{cm}$$

اگر انتهایِ قطعه‌یِ $k$ اُم را $z_k$ بگیریم، مرکزِ جرمِ هر قطعه در $(z_{k-1}+z_k)/2$ است. از طرفِ دیگر $z_k = z_{k-1} + d\cos\theta_k/2$. پس مرکزِ جرمِ کل از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
Z_{cm} &= \frac{1}{N}\{\frac{0+z_1}{2} + \frac{z_1+z_2}{2} + \cdots + \frac{z_{N-1}+z_N}{2}\} \\
&= \frac{1}{N}\{\frac{d}{2}\cos\theta_1 + \frac{d}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \\
&\quad + \frac{d}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3) + \cdots\} \\
&= \frac{d}{2N}\{N\cos\theta_1 + (N-1)\cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_N\} \\
&= \frac{d}{2N}\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)\cos\theta_k. \qquad (۹)
\end{aligned}$$

تابعِ پارش نیز عبارت است از

$$\begin{aligned}
Q_N &= \prod_{k=1}^{N}\int_0^{\pi} 2\pi\sin\theta d\theta e^{\beta mgd(N-k+1)\cos\theta/2} \\
&= \prod_{k=1}^{N}\frac{4\pi\sinh[\beta mgd(N-k+1)/2]}{\beta mgd(N-k+1)/2} \\
&= (4\pi)^N e^{\sum_{k=1}^{N}\ln\{\frac{\sinh[\beta mgd(N-k+1)/2]}{\beta mgd(N-k+1)/2}\}} \qquad (۱۰)
\end{aligned}$$

انرژیِ آزاد عبارت است از

$$A = -kT\ln Q_N \approx -NkT\ln 4\pi - kT\int_0^N dX\ln\{\frac{\sinh(\alpha X)}{\alpha X}\} \qquad (۱۱)$$

که در رابطه‌یِ آخر جمعِ گسسته را به انتگرال تبدیل کرده‌ایم. تغییرِ متغیرِ $\alpha := \beta mgd/2$ نیز صورت گرفته است.

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Q_N}{\partial\, mg} \\
&= d\int_0^N dX\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\{\frac{\sinh(\alpha X)}{\alpha X}\} \\
&= d\int_0^N dX\frac{\partial}{\partial X}\ln\{\frac{\sinh(\alpha X)}{\alpha X}\} \\
&= d\ln\{\frac{\sinh(\alpha N)}{\alpha N}\} = d\ln\{\frac{\sinh(\beta mgdN/2)}{\beta mgdN/2}\} \qquad (۱۲)
\end{aligned}$$

۵– مسئله‌ی 3.25 کتابِ Pathria را حل کنید.
**حل–** تابعِ پارشِ تک‌ذره‌ای عبارت است از

$$Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega+\beta x(n+1/2)^2\hbar\omega}$$

با استفاده از تغییرِ متغیرِ پیش‌نهاد شده در صورتِ مسئله $u := \beta\hbar\omega$ و استفاده از تقریبِ $x \ll 1$ داریم،

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega}[1+\beta x(n+1/2)^2\hbar\omega+\cdots] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} S_k(u)(xu)^k, \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که

$$\begin{aligned} S_0(u) :&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)u} = \frac{1}{2\sinh(u/2)} \\ S_1(u) :&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)u}(n+1/2)^2 \\ &= \frac{d^2}{du^2}S_0(u) = \frac{1}{2\sinh(u/2)}[\coth^2(u/2)-1/2] \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

در اولین رتبه‌ی تقریب داریم،

$$\begin{aligned} \ln Q_1 &\approx \ln[S_0+xuS_1] = \ln S_0 + \ln[1+xuS_1/S_0] \\ &\approx \ln S_0 + xu(S_1/S_0) = -\ln[2\sinh(u/2)] + (xu/2)[\coth^2(u/2)-1/2] \\ &\approx -\ln[2\sinh(u/2)] + x[\frac{2}{u}+\frac{u}{12}+\frac{u^3}{120}+\cdots] \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

انرژیِ سیستم عبارت است از

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln Q_N) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln Q_1)$$

بخشی از جواب مربوط به نوسان‌گرِ هماهنگ است و بخشِ اضافی عبارت است از

$$\delta U \approx Nx\hbar\omega[\frac{2}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{u^2}{40}+\cdots]$$

و ظرفیتِ گرمایی نیز دو بخش دارد که بخشی از جواب مربوط به نوسان‌گرِ هماهنگ است و بخشِ اضافی عبارت است از

$$\delta C \approx 4Nkx[\frac{1}{u}+\frac{u^3}{80}+\cdots]$$