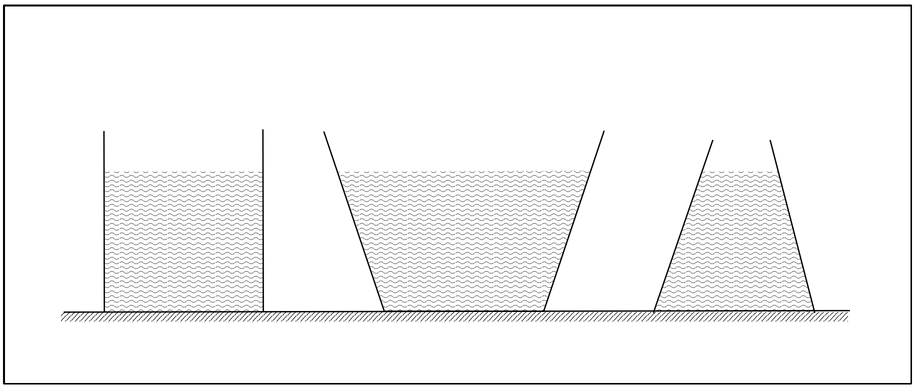
مسائل

مسأله‌ي ۱ – سه ظرفِ چنان که در شکل می‌بینید تا یک ارتفاع از مایعی پُر شده و رویِ میزی قرار داده شده اند. سطحِ مقطعِ پایینِ دو ظرف یکی است. فشار در کفِ ظرف‌ها چه‌قدر است؟ چه نیرویی توسطِ هر ظرف بر میز وارد می‌شود.



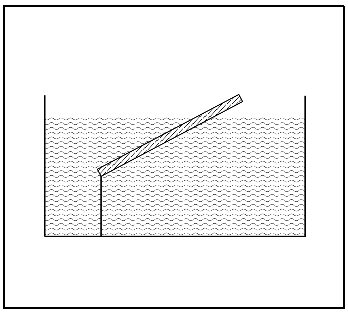
شکلِ مسأله‌ي ۱

مسأله‌ي ۲ – ظرفِ مثالِ ۴ را رویِ سطحِ شیب‌داری با زاویه‌ي شیبِ α قرار می‌دهیم تا لیز بخورد. از اصطکاکِ بینِ ظرف و سطحِ شیب‌دار چشم‌پوشی کنید. سطحِ آزادِ مایعِ درونِ ظرف در حالتِ پایا چه زاویه‌ای با اُفق می‌سازد؟

مسأله‌ي ۳ – فرض کنید در مسأله‌ي قبل ضریبِ اصطکاکِ بینِ ظرف و سطحِ شیب‌دار μ_k باشد. در این حالت سطحِ آزادِ مایعِ درونِ ظرف در حالتِ پایا چه زاویه‌ای با اُفق می‌سازد؟

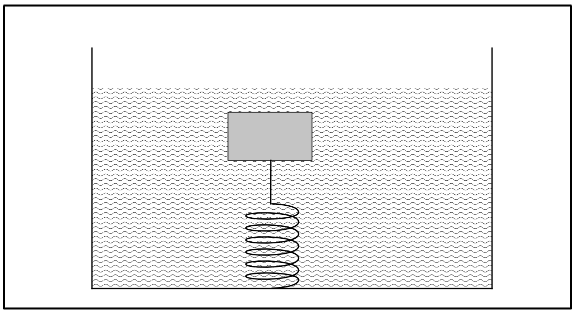
مسأله‌ي ۴ – مطابقِ شکل میله‌ي AB که سبک‌تر از آب است توسطِ نخی به زمین بسته

شده است. $1/4$ میله از آب بیرون است. سطحِ مقطعِ آن کوچک و S است. نسبتِ چگالیِ میله به آب چه‌قدر است؟



شکلِ مسأله‌يِ ۴

مسأله‌يِ ۵— جسمی به چگالیِ ρ_0 و حجمِ V_0 را در شاره ای به چگالیِ ρ و حجمِ V قرار می‌دهیم. $(\rho_0 < \rho)$. این جسم توسطِ فنری با ضریبِ سختیِ k به کفِ ظرف وصل است.



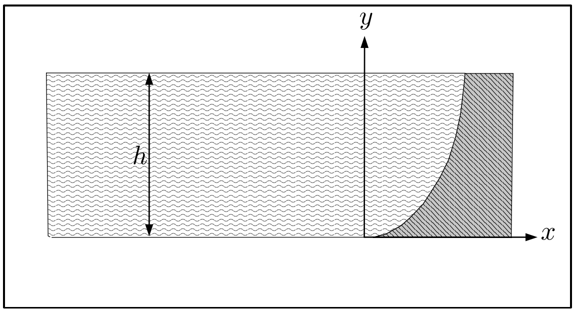
شکلِ مسأله‌يِ ۵

الف— فنر چه نیرویی به کفِ ظرف وارد می‌کند؟

ب— فشار در کفِ ظرف چه‌قدر است؟

ج— اگر این دستگاه رویِ ترازویی قرار دهیم چه‌وزنی خواهد داشت؟

مسأله‌يِ ۶— دیواره‌يِ ساحل در ناحیه‌ای تقریباً به شکلِ سهمی‌ای با معادله‌يِ $y = ax^2$ است. در راستایِ z شکلِ دیواره‌يِ ساحل تا فاصله‌يِ زیادی به همین شکل است. گشتاورِ نیرویی که شاره بر دیواره وارد می‌کند را نسبت به مبدأ به دست آورید.



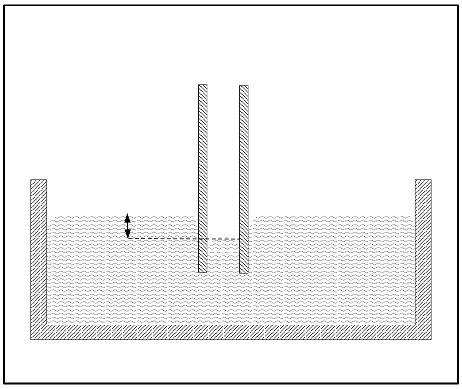
شکلِ مسأله‌ي ٦

مسأله‌ي ٧– رابطه‌ي چگالي‌ِ یک مایعِ تقریباً تراکم‌پذیر (مثلِ آب) و تقریباً هم‌دما، با فشار تقریباً به شکلِ $\rho = \rho_0[1 + B^{-1}(p - p_0)]$ است، که ρ چگالی، p فشار، و ρ_0 و B و p_0 مقدارهایی ثابت‌اند. در نقطه‌ای به عمقِ h در یک اقیانوس، فشارِ آب p است. فشارِ هوا در سطحِ اقیانوس p_0، چگالي‌ِ آب در سطحِ اقیانوس ρ_0، و شتابِ گرانشی g است. با فرضِ $p \ll B$، p را تا رتبه‌ي اول به دست آورید.

مسأله‌ي ٨– دو حباب با شعاع‌هاي R_1 و R_2، $(R_2 > R_1)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید کششِ سطحی برای دو حباب یکی است. اگر این دو حباب به هم وصل شوند حجمِ کدام حباب بیش‌تر و کدام‌یک کم‌تر می‌شود؟ براي‌ِ آزمایش می‌توانید از دو بادکنک استفاده کنید. هر چند در بادکنک کششِ سطحی ثابت نیست و با تغییرِ اندازه کششِ سطحي‌ِ آن عوض می‌شود، پدیده‌ي مشابهی را می‌شود دید.

مسأله‌ي ٩– در مثالِ ٩ با اندازه‌گیري‌ِ θ چه‌گونه می‌توان γ را به دست آورد؟

مسأله‌ي ١٠– لوله‌ي مویینی (بسیار باریکی) به شعاعِ R را در مایعی با کششِ سطحي‌ِ σ و چگالي‌ِ ρ فرو می‌بُریم. مقداری از مایع، از لوله‌ي مویین پایین می‌رود. فرض کنید زاویه‌ای که سطحِ مایع با لوله‌ي مویین در نقطه‌ي تماس می‌سازد، $\theta \approx 0$ باشد، یعنی مایع سطحِ لوله را تَر نکند. ارتفاعِ h که مایع، از لوله‌ي مویین پایین می‌رود، را به دست آورید.



شکلِ مسأله‌ي ۱۰

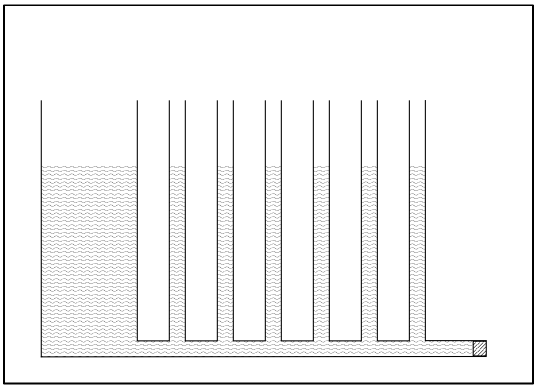
مسأله‌ي ۱۱– با در نظر گرفتنِ مقادیرِ عددیِ $\rho = 1.0\ \mathrm{g/cm^3}$ ،$\rho_0 = 7.8\ \mathrm{g/cm^3}$، و $\sigma = 73\ \mathrm{dyn/cm}$ چه سوزن‌هایی (با چه شعاع‌هایی) را می‌توان رویِ آب نگه داشت؟

مسأله‌ي ۱۲– فرض کنید در مثالِ ۱۰ چسبندگی $\gamma \neq 0$. نتایج چه فرقی می‌کند؟ استدلال‌تان هم‌راه با محاسبه باشد.

مسأله‌ي ۱۳– تحتِ چه شرایطی کُره‌ای به شعاعِ R و چگالی ρ_0 را می‌توان رویِ شاره‌ای به چگالیِ ρ و کششِ سطحیِ σ شناور کرد. فرض کنید شاره کره را تَر نمی‌کند. $(\gamma = 0)$

مسأله‌ي ۱۴– بینِ دو استوانه‌يِ هم‌محور به شعاع‌هايِ a و b $(b > a)$ از شاره‌ای با گران‌رويِ μ پُر شده است. استوانه‌يِ داخلی باسرعتِ v_1 در راستايِ محور به سمتِ راست و استوانه‌يِ خارجی باسرعتِ v_2 در راستايِ محور به سمتِ چپ حرکت می‌کنند. در حالتِ پایا نمايِ سرعتِ شاره چیست؟

مسأله‌ي ۱۵– مطابقِ شکل چند ظرف از شاره‌ای پَر شده و یک سرِ آن با چوب‌پنبه بسته شده است. گران‌رويِ شاره μ است. اگر چوب‌پنبه را برداریم سطحِ آب درونِ لوله‌ها چه می‌شود؟ تغییرِ شکلِ سطحِ درونِ لوله‌ها را به عنوانِ تابعی از زمان به دست آورید. فرض کنید شاره با سرعتِ کمی از ظرف خارج می‌شود و جواب را برايِ حالتِ تقریباً پایا به دست آورید.



شکلِ مسأله‌ي ۱۵

مسأله‌ي ۱٦—الف— خطوطِ شار را براي میدانِ سرعتِ دوبعدي

$$\begin{cases} v_x = kx, \\ v_y = ky, \end{cases}$$

به دست آورید.

ب— فرض کنید تمام نقاطی که در زمانِ $t = 0$ رويِ دایره‌ای با معادله‌ي $x_0^2 + y_0^2 = a^2$ هستند را رنگی کرده‌ایم. در زمان‌هايِ بعد این خَم به چه شکلی در می‌آید؟ $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ چه‌قدر است؟ $k > 0$ و $k < 0$ چه معنایی دارند؟

مسأله‌ي ۱۷— معادله‌ي خطوطِ میدان براي وقتی دو بارِ $\pm q$ در فاصله‌ي d از هم ساکن‌اند را به دست آورید.

مسأله‌ي ۱۸— فرض کنید در مثالِ ۱۴ تمام نقاطی که در زمانِ $t = 0$ رويِ دایره‌ای با معادله‌ي $(x_0 - a)2 + (y_0 - b)^2 = R^2$ هستند را رنگی کرده‌ایم. در زمان‌هايِ بعد این خَم به چه شکلی در می‌آید؟

مسأله‌ي ۱۹— خطوطِ شار را براي میدانِ سرعتِ دوبعدي

$$\begin{cases} v_x = xt, \\ v_y = -yt, \end{cases}$$

به دست آورید.

مسألهٔ ۲۰ —الف— خطوطِ شار را برای میدانِ سرعتِ دوبعدی

$$\vec{v} = -\hat{i}ky + \hat{j}kx$$

به دست آورید. اگر در سطحِ مقطعِ اُفقیِ یک گردباد میدانِ سرعت را در نظر بگیریم تقریباً به این شکل است.

ب— در صورتی که میدانِ سرعت به صورتِ زیر باشد، خطِ شار و مسیر را به دست آورید.

$$\vec{v} = -\hat{i}ky + \hat{j}kx + \hat{k}b(t)$$

$b(t)$ تابعِ مشخصی از زمان است.

ج— خطوطِ هم‌فشار را برای شاره‌یِ بخشِ الف به دست آورید.

پیوستِ ۱

خَمِ γ را در صفحه‌يِ xy در نظر بگیرید. محورِ x را مماسِ بر خمِ γ و محورِ y را عمودِ بر آن بگیرید. می‌خواهیم انحنايِ آن را در نقطه‌يِ O مبدأِ مختصاتِ xy به دست آوریم. در نقطه‌يِ O دایره‌ای را بر خمِ γ مماس می‌کنیم. فرض کنید علاوه بر مشتقِ اول، مشتقِ دومِ y بر حسبِ x برايِ خمِ γ و دایره یکی باشد. شعاعِ انحنايِ این خم در نقطه‌يِ O، شعاعِ این دایره است. معادله‌يِ خمِ γ در نزدیکيِ نقطه‌يِ O، $y \approx \alpha x^2$ است. توجه دارید که در مبدأ $y(0) = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)|_{x=0} = 0$. معادله‌يِ دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد و مرکزش رويِ محورِ y است عبارت است از

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

در همسایگيِ مبدأ معادله‌يِ این دایره عبارت است از

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2} \approx R - R(1 - \frac{x^2}{2R^2}) = \frac{x^2}{2R}. \tag{1}$$

از برابر قرار دادنِ این معادله با معادله‌يِ خم در نزدیکيِ مبدأ شعاعِ انحنايِ خم در مبدأ عبارت است از

$$R = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{(\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2)|_{x=0}} \tag{2}$$

حالا اگر رویه‌ای دو بعدی را بخواهیم بررسی کنیم، ابتدا سطحی را بر رویه در نقطه‌يِ موردِ نظرمان O مماس می‌کنیم، مثلاً سطحِ xy . محورِ عمود بر سطح را z و مبدأِ مختصات را O می‌گیریم. معادله‌يِ رویه

$$\Phi := z - \zeta(x, y) = 0. \tag{3}$$

هر صفحه‌ای که بر صفحه‌يِ xy عمود کنیم سطحِ مقطعش با رویه یک خم است. شعاعِ انحنايِ هر یک از این خم‌ها را می‌توان به دست آورد. بنا بر این بی‌نهایت شعاعِ انحنا برايِ این بی‌نهایت خم می‌توان به دست آورد. در نزدیکيِ مبدأِ مختصات معادله‌يِ رویه عبارت است از

$$
\begin{aligned}
z &= \zeta(0,0) + x\frac{\partial\zeta}{\partial x}|_{x,y=0} + y\frac{\partial\zeta}{\partial y}|_{x,y=0} \\
&\quad + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}|_{x,y=0} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}|_{x,y=0} + xy\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}|_{x,y=0} + \cdots
\end{aligned} \tag{4}
$$

اگر تا مشتقاتِ رتبه‌يِ دوم نگه داریم

$$
z = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy. \tag{5}
$$

که α، β، و γ ثابت و مشتقاتِ رتبه‌يِ دومِ ζ نسبت به x و y است. این رابطه را می‌توان به صورتِ زیر نیز نوشت.

$$
z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma/2 \\ \gamma/2 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}
$$

با دوران دستگاهِ مختصات حولِ محورِ z می‌توان دستگاهِ مختصاتی مثلِ $x'y'z$ پیدا کرد که ماتریسِ $\mathcal{M}$ قطری باشد. توجه کنید که ماتریسِ $\mathcal{M}$ ماتریسی متقارن است و حتماً می‌توان آن راقطری کرد. در این دستگاهِ مختصات معادله‌يِ رویه عبارت است از

$$
z = \alpha' x'^2 + \beta' y'^2 \tag{7}
$$

محورهايِ x' و y' محورهايِ اصليِ رویه در نقطه‌يِ O هستند. اشتراکِ رویه با سطوحِ $x'z$ و $y'z$ دو خم است. به شعاعِ انحنايِ این خم‌ها، شعاع‌هايِ اصلی رویه می‌گوییم. شعاع‌هايِ اصليِ یک رویه می‌توانند مثبت و یا منفی باشند. کره رویه‌ای است که دو شعاعِ انحنايِ اصليِ آن برابرند. رویه‌يِ به شکلِ زین رویه‌ای است که یکی از شعاعِ انحناهايِ اصليِ آن مثبت و دیگری منفی است.