

به نام خدا

دانش گاه الزهرا - آبان ماه ۸۶

امتحان میان ترم اول مکانیک کوانتومی I

مسئله 1) الف - نشان دهید برای هر سه عملگر A, B, C اتحاد زیر برقرار است.

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

ب - جابه جاگر سه عملگر $L_i, i = 1, 2, 3$ به صورت زیر است

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k,$$

که ϵ_{ijk} نماد لوی - چی ویتا است. عملگر M با دو تا از آنها، مثلاً L_1 و L_2 جابه جا می شود.

$$[M, L_1] = [M, L_2] = 0,$$

جابه جاگر آن با سومی یعنی L_3 چیست؟

ج - عملگر L^2 با $L^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ داده می شود. جابه جاگرهای زیر را به دست آورید.

$$[L^2, L_i] = ? \quad [L^2, M] = ?$$

مسئله 2) عملگر انتقال Γ به صورت زیر تعریف می شود

$$\Gamma f(x) := f(x + a)$$

شکل صریح Γ را بر حسب عملگر تکانه $P_{op} := \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ به دست آورید.

مسئله 3) تابع موج ذره ای به جرم m در $t = 0$ ، به صورت $\psi(x, 0) = A \exp\left\{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0x\right\}$ است.

الف - ثابت A را به دست آورید.

ب - $\langle x \rangle_0, \langle p \rangle_0, \langle x^2 \rangle_0, \langle p^2 \rangle_0, \Delta x_0, \Delta p_0, \rho(x, 0)$ و $J(x, 0)$ را به دست آورید.

ج - $\psi(x, t)$ را به دست آورید.

د - $\langle x \rangle_t, \langle p \rangle_t, \rho(x, t)$ و $J(x, t)$ را به دست آورید.

ه - $\rho(x, t)$ را به طور کیفی رسم کنید. سرعت قله v آن و پهنای آن $a(t)$ را به دست آورید. برای زمان های

بزرگ $a(t), t \gg ma_0^2/\hbar$ در اولین تقریب به دست آورید.

ممکن است بعضی از این روابط به درد شما بخورد.

$$I_0 := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_n := \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{-\alpha x^2} = \left(\frac{n-1}{2\alpha}\right) I_{n-2}$$

$$J(x, t) := \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial x} \right)$$

$$\rho(x, t) := \psi^*(x, t) \psi(x, t)$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0$$