

به نام خدا

دانش گاه الزهرا - بهمن ماه ۸۶

امتحان پایان ترم مکانیک کوانتومی I

مسئله 1) پتانسیل $V(x) = -\lambda\delta(x)$ را در نظر بگیرید. شار ذره ای به جرم m از سمت چپ می تابد. تابع حالت

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < 0 \\ Te^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

است. ضریب عبور T و ضریب بازتاب R را به دست آورید.

مسئله 2) تابع حالت نوسان گر هم آهنگ یک بعدی ای در ابتدا

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_0(x) + u_1(x)]$$

است. $u_0(x)$ و $u_1(x)$ ویژه تابع های انرژی ی نوسان گر هم آهنگ یک بعدی هستند. جرم نوسان گر m و بسامد آن ω است.

الف - تابع حالت سیستم در زمان $t = T$ چیست؟

ب - مقادیر متوسط مکان $\langle x \rangle$ و تکانه ی ذره $\langle p \rangle$ در زمان t را به دست آورید.

مسئله 3) $2N$ فرمیون یک سان با اسپین $1/2$ در یک پتانسیل نوسان گر هم آهنگ یک بعدی قرار دارند.

الف - انرژی ی فرمی ی این سیستم، E_F ، چه قدر است؟

ب - انرژی ی کل این سیستم، E_{tot} ، چه قدر است؟

مسئله 4) نامساوی ی شوارتز

$$\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle \geq |\langle \phi | \psi \rangle|^2$$

را اثبات کنید.

راه نمایی: از این که برای $\Psi := \phi + \lambda\psi$ ، $\langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0$ است، می توانید استفاده کنید.

مسئله 5) فرض کنید

$$e^{\lambda(aA+bA^\dagger)} = e^{\lambda aA} F(\lambda, A^\dagger)$$

الف - از این رابطه نسبت به λ مشتق بگیرید و نشان دهید

$$bA^\dagger e^{\lambda aA} F(\lambda, A^\dagger) = e^{\lambda aA} \frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda, A^\dagger)$$

ب- با استفاده از رابطه‌ی بالا و

$$e^{-\lambda A} f(A^\dagger) e^{\lambda A} = f(A^\dagger - \lambda)$$

نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda, A^\dagger) = (bA^\dagger - \lambda ab) F(\lambda, A^\dagger).$$

و بالاخره با استفاده از این رابطه $F(\lambda, A^\dagger)$ را به دست آورید.

ج- متوسط عملگر $e^{(aA+bA^\dagger)}$ را برای حالت پایه‌ی نوسان‌گر هم‌آهنگ به دست آورید.

$$\langle 0 | e^{(aA+bA^\dagger)} | 0 \rangle = ?$$

راه‌نمایی: ممکن است روابط زیر به دردتان بخورد.

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}},$$

$$A^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}},$$

$$[A, A^\dagger] = 1,$$

$$A|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$