

بسمه تعالی

امتحان نهایی مکانیک آماری پیشرفته

دی ماه ۱۳۸۲

دانشگاه الزهرا

۱- تابع آبرپارش \mathcal{J} برای ذرات بدون برهم کنش کوانتومی عبارت است از

$$\ln \mathcal{J} = \frac{gV}{ah^3} \int d^3p \ln(1 + aze^{-\beta\epsilon}), \quad (1)$$

که برای فرمیون ها $a = +1$ و برای بوزون ها $a = -1$ است.

الف- تابع \ln درون انتگرال را بسط دهید. در این صورت رابطه‌ی (۱) به صورت جمع بی‌نهایت انتگرال خواهد شد.

$$(\text{راه‌نمایی: } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n)$$

ب- برای ذرات غیرنسبیتی $\epsilon = |p|^2/(2m)$ ، این انتگرال‌ها را محاسبه کنید. با جایگذاری مقادیر به دست آمده \mathcal{J} را محاسبه کنید.

$$(\text{راه‌نمایی: } \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2/2} = \sqrt{\pi/2} \alpha^{-3/2})$$

ج- محاسبه‌ای مشابه حالت قبل ولی این بار برای حالت $\epsilon = c|p|$ را انجام دهید.

$$(\text{راه‌نمایی: } \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x} = 2/\alpha^3)$$

د- جواب خود در بندهای (ب) و (ج) را بر حسب تابع $\Phi(s, x) := \sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n^s)$ بنویسید.

ه- $\mathcal{J} = \exp\{\ln \mathcal{J}\}$ را به صورت بسط تیلوری از $z = e^{\beta\mu}$ بنویسید. سه جمله‌ی اول بسط را نگه دارید.

و- با استفاده از تعریف $Q_N = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N$ ، تابع پارش Q_1 و Q_2 را به دست آورید.

۲- ذرات جرم‌داری را در نظر بگیرید که از آمار کوانتومی جدیدی (به غیر از آمار فرمی-دیراک و بوز-انشتین) تبعیت می‌کنند. این ذرات هر حالت را تنها به صورت زوج ذره (0، 2، 4، ...) اشغال می‌کنند.

الف- گاز ایده‌آل بدون برهم کنشی از این ذرات در 3 بُعد نظر بگیرید ($\epsilon = |p|^2/(2m)$). تابع پارش \mathcal{J} را به عنوان تابعی از دما، پتانسیل شیمیایی، و حجم به دست آورید.

ب- تعداد متوسط ذرات در هر حالت انرژی را به دست آورید.

ج- در دماهای پایین رفتار این سیستم شبیه فرمیون‌ها و یا بوزون‌هاست؟ (مثلاً سطح انرژی فرمی دارد و یا چگالش بوز-انشتین؟)

۳- N اتم تمیز ناپذیر بدون برهم کنش کلاسیک را در نظر بگیرید. فرض کنید این

ذرات در پتانسیل

$$V(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\gamma}{2}(y - y_0)^2, \quad (2)$$

- قرار دارند، که α و γ مقادیری ثابت هستند. ذرات در راستای x و y مقید نیستند ولی در راستای z با دیوارهایی در $z = \pm L/2$ مقیدند. دمای گاز ثابت و T است.
- الف - احتمال آن که ذره‌ای در فاصله‌ی y و $y + dy$ باشد، چه قدر است؟
- ب - احتمال آن که سرعت ذره‌ای در راستای y بین v_y و $v_y + dv_y$ باشد، چه قدر است؟
- ج - تابع پارشی گاز $Q_N(N, L, T)$ چه قدر است؟
- د - نیروی وارد بر دیوار، f_z را به عنوان تابعی از N, L, T و T به دست آورید.
- و - با کم کردن مقدار γ ، گاز به طور بی‌دررو تا دمای T_f سرد می‌شود. در این فرآیند انتروپی ثابت می‌ماند. دمای نهایی را بر حسب مقادیر اولیه و نهایی γ و دمای اولیه به دست آورید.
- موفق باشید.