

به نام خدا

امتحان میان‌ترم دوم امواج دانش‌گاه الزهرا - آذرماه ۹۱

مسئله‌ی ۱) دیدیم که انرژی کلِ ریسمانی که نوسان کم‌دامنه دارد عبارت است از

$$E = \int_0^{\ell} dx \frac{\rho}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2)$$

که c سرعت موج در ریسمان است.

الف) نشان دهید آهنگ تغییر انرژی ریسمان مرتعش عبارت است از

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_0^{\ell}$$

ب) ریسمانی که بین دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=\ell$ بسته شده انرژی‌اش با زمان چه‌گونه تغییر می‌کند؟

ج) انرژی ریسمانی با شرط مرزی

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(\ell, t) = -\gamma u(\ell, t)$$

را بر حسب $u(\ell, t)$ به دست آورید. γ مقداری ثابت است.

مسئله‌ی ۲) ریسمانی به طول ℓ از دو سرش ثابت شده است. شکل ریسمان در ابتدا

$$u(x, 0) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right)$$

و $u_x(x, 0) = 0$ است.

الف) $u(x, t)$ را به دست آورید.

ب) انرژی این ریسمان چه‌قدر است؟

ج) پس از چه مدت شکل ریسمان مثل شکل ابتدایی‌اش می‌شود؟

مسئله‌ی ۳) ریسمان یک‌نواختی را در حضور نیروی گرانش در نظر بگیرید. چگالی‌ی

جرمی ریسمان ρ و کشش ریسمان T است.

الف) با محاسباتی مشابه آن‌چه در کلاس انجام دادیم ولی با در نظر گرفتن گرانش نشان

دهید

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho g = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ب) با تغییر متغیری به صورت $u(x, t) = v(x, t) + f(x)$ و انتخاب مناسب تابع $f(x)$

می‌توان به معادله‌ی موج به شکل ساده‌ی

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

برای $v(x, t)$ رسید. $f(x)$ در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟