

به نام خدا

امتحان پایان ترم مکانیک شاره‌ها دانش‌گاه الزهرا - تیر ۱۳۸۳

مسئله ۱ - برای شاره‌ای تابع پتانسیل عبارت است از

$$\phi = x^2 - y^2 + 2xy.$$

الف - میدان سرعت این شاره را به دست آورید.

ب - تانسورهای چرخش  $\omega_{ij}$  و کرنش  $d_{ij}$  را به دست آورید.

ج - آیا این شاره تراکم‌ناپذیر است؟ توضیح دهید.

د - آیا این شاره غیرچرخشی است؟ توضیح دهید.

مسئله ۲ - شاره‌ی تراکم‌ناپذیری با چگالی  $\rho$  و گرانروی  $\mu$  در ناحیه‌ی بین دو استوانه‌ی هم‌محور با شعاع‌های  $a$  و  $b$  ( $a < b$ ) قرار دارد. استوانه‌ی داخلی با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخد و استوانه‌ی خارجی با همان سرعت زاویه‌ای  $\omega$  ولی در جهت عکس می‌چرخد. میدان سرعت شاره را در حالت پایا به دست آورید. از گرانش صرف‌نظر کنید.

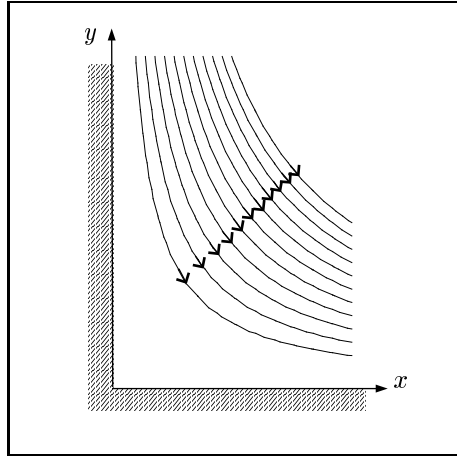
مسئله ۳ - در رودخانه‌ای آب با سرعت تقریبی  $v_0$  به پلی نزدیک می‌شود. مقطع پایه‌ی پلی مستطیلی به ابعاد  $a$  و  $b$  است. وقتی آب از کنار پایه‌ی پلی می‌گذرد، در پشت آن موجک‌هایی ایجاد می‌شود. این موجک‌ها نیرویی دوره‌ای به پایه‌ی پلی وارد می‌کنند که می‌تواند برای پلی خطرناک باشد. فرکانس این نیروی دوره‌ای  $\omega$  به سرعت آب  $v_0$ ، ابعاد مقطع پلی  $a$  و  $b$ ، گرانروی شاره  $\mu$  و چگالی شاره  $\rho$  بستگی دارد.

الف - کمیت‌های بی‌بعد مسئله را به دست آورید.

ب - برای بررسی استحکام پلی، مدلی مشابه پلی اصلی اما صد برابر کوچک‌تر می‌سازیم. از شاره‌ی دیگری با همان عدد رینولدز مسئله‌ی اصلی استفاده می‌کنیم. سرعت شاره‌ی مدل ده برابر کوچک‌تر سرعت از شاره‌ی اصلی است. فرکانس در مسئله‌ی اصلی چند برابر فرکانس در مدل است؟

مسئله ۴ - الف - شاره‌ای دو بُعدی، غیرگران‌رو و غیرچرخشی از گوشه‌ای با زاویه‌ی

$\pi/2$  مطابق شکل می‌گذرد. در تمام بخش‌های مسئله از گرانج صرف‌نظر کنید.



تابع پتانسیل و میدان سرعت این شاره را به دست آورید. اندازه‌ی سرعت در فواصل دور متناسب با فاصله از مبدأ است.

$$|\mathbf{v}| = \alpha r$$

ب- فشار در نقطه‌ای با مختصات  $(0, h)$ ،  $P_0$  است. فشار در نقطه‌ای با مختصات  $(2h, 0)$  چه قدر است؟

ج- فرض کنید چشمه‌ای دو بُعدی با قدرت  $Q$  را در نقطه‌ای با مختصات  $(a, a)$  نسبت به گوشه قرار دهیم. در این قسمت فرض کنید سرعت شاره در فواصل دور به سمت صفر میل کند. تابع پتانسیل و میدان سرعت این شاره را به دست آورید.

د- برای شاره‌ی توصیف شده در بند (ج) فشار در نقطه‌ای با مختصات  $(0, h)$ ،  $P_0$  است. فشار در نقطه‌ای با مختصات  $(2h, 0)$  چه قدر است؟ روابط زیر ممکن است برای حل مسائل مفید باشند.

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left( \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + g \nabla z \right) \cdot d\vec{S} = [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] \cdot d\vec{S}$$

$$d_{ij} := (\partial_i v_j + \partial_j v_i) / 2, \quad \omega_{ij} := (\partial_i v_j - \partial_j v_i) / 2$$

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P - \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

تابع پتانسیل برای:  
شار موازی دو بُعدی

$$\phi = -u_1x - u_2y$$

چشمه‌ی دو بُعدی در مبدأ مختصات

$$\phi = C_1 \ln r + C_2,$$

گرداب دو بُعدی در مبدأ مختصات

$$\phi = A \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

دوتایی دو بُعدی در مبدأ مختصات

$$\phi = \frac{B \cos \theta}{r}$$