

## بسمه تعالی

امتحان نهایی مکانیک تحلیلی II

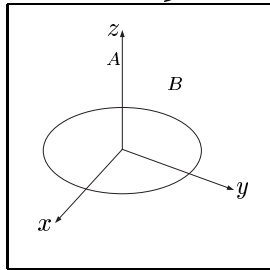
دانشگاه الزهرا - خرداد ۱۳۸۲

۱- پتانسیل گرانشی ناشی از حلقه‌ای به جرم  $m$  و شعاع  $a$  را در حالات زیر به دست آورید:

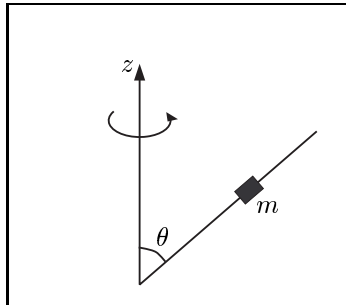
الف- در نقطه‌ی  $A$  به فاصله‌ی  $r$  از مرکز حلقه و روی محور  $z$

ب- در نقطه‌ی  $B$  به فاصله‌ی  $r$  از مرکز حلقه و در جهتی که با محور  $z$  زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد.

فاصله‌ی  $r$  را نسبت به  $a$  خیلی بزرگ بگیرید و جواب را تا مرتبه‌ی دوم  $a/2$  بسط دهید.



۲- دانه‌ی تسبیحی به جرم  $m$  می‌تواند آزادانه روی میله‌ای که با جهت قائم زاویه‌ی  $\theta_0$  می‌سازد حرکت می‌کند. میله نیز آزاد است که حول محور قائم دوران کند.



الف- لاگرانژی این سیستم را در دستگاه کروی بنویسید.

ب- همیلتونی این سیستم را بنویسید.

ج- ثابت‌های حرکت کدام‌اند؟ چرا؟

۳- بخشی از دایره‌ای را مطابق شکل بریده‌ایم. جرم آن  $M$  است.

الف- مرکز جرم این شکل کجاست؟

ب- تانسور ماند را نسبت به دستگاه  $xyz$  به دست آورید.

ج- محورهایی اصلی جسم کدام‌اند؟

د- تانسور ماند را نسبت به دستگاهی موازی دستگاه  $xyz$  در مرکز جرم به دست آورید.  
گشتاور خارجی وارد بر جسم را صفر بگیرید و  $\vec{\omega}(t=0) = \Omega \hat{i} + b\Omega \hat{k}$  است.  
( $b^2 = \frac{\sin 2\theta_0}{2\theta_0}$ )

ه- با حل معادلات اویلر نشان دهید  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  را می‌توان بر حسب تابعی مثل  $f(t)$  نوشت. دستگاه  $xyz$  چسبیده به جسم است.

$$\omega_x = \Omega \cos f, \quad \omega_y = \Omega \sin f, \quad \omega_z = \dot{f}.$$

و- تابع  $f(t)$  را به دست آورید.

ز- رفتار  $f(t)$  را در زمان‌های بلند ( $t \rightarrow \infty$ ) به دست آورید و با استفاده از آن  $\vec{\omega}(t)$  را در زمان‌های بلند ( $t \rightarrow \infty$ ) به دست آورید.

موفق باشید.