

نظریه‌ی پوزیترون^۱

پ. ا. ایم. دیراک

کشفِ اخیرِ الکترونِ مثبت یا پوزیترون توجه را به نظریه‌ی قبلی حالات انرژی منفی الکترون جلب کرده است. نتایج تجربی‌ای که تا کنون به دست آمده با پیش‌بینی‌های آن نظریه می‌خواند. به محض آن که به‌خواهیم حرکت ذره‌ای را بر اساس اصول نسبیت خاص مطالعه کنیم، مسئله‌ی انرژی‌های منفی مطرح می‌شود. در مکانیک غیرنسبیتی، انرژی ذره W به عنوان تابعی از سرعت v یا ممنتوم p داده می‌شود

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

که W همواره مثبت است. اما در مکانیک نسبیتی این فرمول‌ها به

$$W^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

یا

$$W = c(m^2c^2 + p^2)^{1/2},$$

تبدیل می‌شوند که W می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

معمولاً این فرض مکمل را هم می‌کنیم که W باید همواره مثبت باشد. این فرض در نظریه‌ی کلاسیک که کمیت‌ها همواره تغییرات پیوسته دارند، پذیرفته شده است؛ در نتیجه W هرگز نمی‌تواند از یک مقدار مثبت، که باید بزرگ‌تر از mc^2 باشد، به مقادیری منفی برود، که باید کوچک‌تر از $-mc^2$ باشند. اما برعکس، در نظریه‌ی کوانتمی متغیر می‌تواند تغییرات گسسته داشته باشد، بنا بر این W می‌تواند از مقادیری مثبت به مقادیری منفی برود.

^۱ این مقاله ترجمه‌ای است از

P. A. M. Dirac: *Theory of the Positron*; in "Early quantum electrodynamics: a source book" Arthur I. Miller, Cambridge University Press, 1994, pp. 136-144,

که اولین بار در مقاله‌نامه‌ی زیر چاپ شده بوده.

Structure et Propriétés des Noyaux Atomiques. Rapport et discussions du septième conseil de physique tenu à Bruxelles du 22 au 29 octobre 1933 sous les auspices de l'Institut International de Physique Solvay, pp. 203-30, Paris, Gauthier-Villars (1934).

ترجمه‌ی امیر آفامحمدی

این که بتوان برای الکترون یک نظریه‌ی کوانتومی نسبیتی ساخت که در آن گذارهای انرژی مثبت به انرژی منفی را بتوان کنار گذاشت، میسر نشده است. بنا بر این نمی‌توان فرض کرد که انرژی همیشه مثبت است بدون این که تناقض‌هایی در نظریه به وجود آید.

با این وصف، دو راه پیش پای ماست. یا باید یک معنای فیزیکی برای حالات انرژی منفی بیابیم، یا باید بپذیریم که نظریه‌ی کوانتومی نسبیتی تا اندازه‌ای که پیش‌بینی گذارهای حالات انرژی مثبت و منفی را می‌کند نادقیق است. اما عموماً، با در نظر گرفتن تبادل انرژی‌هایی از مرتبه‌ی mc^2 ، گذارهایی از این نوع پیش‌بینی می‌شوند؛ و به نظر نمی‌رسد دلیل اصولی‌ای در برابر به کارگیری مکانیک کوانتومی در مبادله‌ی چنین انرژی‌هایی وجود داشته باشد. این درست است که گویا نمی‌توان مکانیک کوانتومی را در فاصله‌هایی از مرتبه‌ی شعاع کلاسیک الکترون، $e^2/(mc^2)$ ، به کار بست، زیرا نظریه‌ی امروزی به هیچ وجه نمی‌تواند بحثی از ساختار الکترون بکند. اما چنان فواصلی، اگر طول موج الکترون تلفی شوند، مربوط به انرژی‌های از رتبه‌ی $(hc/e^2)(mc^2)$ اند، که خیلی بزرگ‌تر از تغییر انرژی مورد بحث است. به نظر می‌رسد عاقلانه‌ترین کار جست‌وجوی معنایی فیزیکی برای حالت‌های الکترون منفی است.

الکترون در حالت انرژی منفی، از دیدگاه تجربی شیء عجیبی است، اما به هر حال چیزی است که می‌توانیم از دیدگاه نظری مطالعه‌اش کنیم. به خصوص، می‌توانیم حرکت آن را در یک میدان الکترومغناطیسی دلخواه پیش‌بینی کنیم. نتیجه‌ی محاسبه، چه از نظر مکانیک کلاسیک و چه نظریه‌ی کوانتومی، آن است که الکترونی با انرژی منفی، در یک میدان الکترومغناطیسی، درست همان طوری منحرف می‌شود که الکترونی با انرژی مثبت و بار $+e$ (به جای $-e$).

این نتیجه فوراً به تشابهی بین الکترون انرژی منفی و پوزیترون دلالت می‌کند. وسوسه می‌شویم که الکترون در یک حالت انرژی منفی را دقیقاً همان پوزیترون بگیریم، اما این پذیرفتنی نیست زیرا پوزیترونی که مشاهده می‌کنیم قطعاً انرژی جنبشی منفی ندارد.

با استفاده از اصل طرد پاولی، که به موجب آن یک حالت کوانتومی را بیش از یک الکترون نمی‌تواند اشغال کند، می‌توان نتیجه‌ی بهتری به دست آورد. بیایید فرض کنیم که در جهانی که می‌شناسیم، حالات انرژی منفی تقریباً همگی با الکترون پر شده‌اند، و توزیعی که به دست می‌آید به علت یک نواختی در کل فضا از نظر ما قابل مشاهده نیست. با این وصف، هر حالت انرژی منفی اشغال نشده معرف شکسته شدن آن یک نواختی است، و باید خودش را مانند یک حفره نشان دهد. می‌توان این حفره‌ها را پوزیترون گرفت.

این فرض مشکلات اساسی تعبیر حالات انرژی منفی را حل می‌کند. در توزیعی از الکترون‌های انرژی منفی، حفره معرف انرژی مثبت است، چون مربوط به یک کمبود موضعی در انرژی منفی است. علاوه بر این، حرکت حفره دقیقاً مثل حرکت الکترون لازم برای پر کردن حفره است. از این جا می‌توانیم دو نتیجه بگیریم: اول آن که حرکت حفره با یک تابع موج شرودینگر، که مشابهش را برای حرکت الکترون داریم، توصیف می‌شود، و دوم آن که حفره در یک میدان رفتاری مثل الکترون مثبت با انرژی

مثبت دارد. پس، حفره می‌تواند تصویری مثل یک ذره‌ی عادی داشته باشد، ذره‌ای با بار مثبت؛ و یکی گرفتن حفره با پوزیترون معقول است.

اگر فرض ما صحیح باشد، باید بتوانیم از فرض مان نتیجه‌هایی که در تجربه اثبات‌پذیر اند بگیریم. اولاً جرم پوزیترون باید با جرم الکترون دقیقاً مساوی باشد، و بار آن نیز باید درست برابر با بار الکترون ولی با علامت مخالف باشد. علاوه بر این، نتیجه‌های خاصی در مورد خلق و نابودی پوزیترون‌ها می‌گیریم.

به علت اصل طرد پاولی، یک الکترون عادی با انرژی مثبت نمی‌تواند به حالتی با انرژی منفی که اشغال شده است بپردازد. برعکس، می‌تواند به یک حفره بپردازد و آن را پر کند. به این ترتیب، الکترون و پوزیترون می‌توانند متقابلاً هم‌دیگر را نابود کنند. انرژی آن‌ها را باید به صورت فوتون بیابیم، به دلیل بقای انرژی و ممنتیم باید حداقل دو فوتون تولید شود. می‌توان احتمال روی دادن چنان حادثه‌ای را حساب کرد و عمر پوزیترونی را که در توزیعی از الکترون‌ها حرکت می‌کند به دست آورد. برای پوزیترونی که به آرامی در هوای با فشار یک اتمسفر حرکت می‌کند، نتیجه عمر متوسط 3×10^{-7} ثانیه است؛ که با افزایش سرعت پوزیترون زیاد می‌شود. این نتیجه، از نظر رتبه‌ی بزرگی، با نتیجه‌ی آزمایش‌های قابل مقایسه است، زیرا آن قدر بزرگ هست که یک پوزیترون سریع بتواند بدون نابود شدن از اتاق ابر ویلسون⁽¹⁾ بگذرد، و به اندازه‌ی کافی کوچک هست که نتوان در حالت عادی در آزمایش‌گاه پوزیترون دید.

اگر هسته‌ای باشد تا ممنتیم آزاد شده را جذب کند، الکترون و پوزیترون می‌توانند متقابلاً هم‌دیگر را نابود و تنها یک فوتون خلق کنند. فرآیند عکس این است که به از برخورد تنها یک فوتون با یک هسته، یک پوزیترون و یک الکترون تولید شود. می‌توانیم این طور تجسم کنیم که این پدیده یک اثر فتوالکتریک است روی یکی از الکترون‌های انرژی منفی که در مدارهای هذلولی در نزدیکی هسته است. این الکترون به حالتی با انرژی مثبت می‌پردازد و در نتیجه به صورت یک الکترون عادی ظاهر می‌شود و در پشت سرش یک حفره به جا می‌گذارد که مثل پوزیترون رفتار می‌کند. اوپنهایمر⁽²⁾، و مستقلاً پایزل⁽³⁾، احتمال چنین فرایندی را تخمین زده اند، و نتیجه از نظر رتبه‌ی بزرگی با آزمایش تولید پوزیترون ناشی از تابش گامای سخت به هسته‌ی سنگین می‌خواند. برای آن که برداشتی که برای حالات انرژی منفی پیش‌نهاد می‌کنیم، به شکل یک نظریه‌ی کامل درآید، نه تنها باید حرکت الکترون‌ها و حفره‌ها را در حضور میدان بررسی کنیم بلکه باید چگونگی تولید میدان الکترومغناطیسی توسط الکترون‌ها و حفره‌ها را هم بررسی کنیم. برای این کار باید فرض جدیدی مطرح شود، زیرا این مفهوم عادی که بار $-e$ ی هر الکترون سهمی در در چگالی بار الکتریکی ρ دارد، و بنا بر معادله‌ی ماکسول

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1)$$

در تعیین میدان الکتریکی E مشارکت دارد، آشکارا منجر به یک میدان بی‌نهایت در هر نقطه می‌شود.

بیابید فرض کنیم توزیعی از الکترون‌ها که در آن هیچ حالت انرژی مثبتی اشغال نشده باشد میدانی تولید نمی‌کند. انحراف از چنین توزیعی است که، مطابق رابطه (1)، میدان را می‌سازد. براساس این فرض، یک حالت انرژی مثبت اشغال شده میدانی تولید می‌کند که مربوط به بار e^- است، و یک حالت انرژی منفی اشغال نشده میدانی تولید می‌کند که مربوط به بار e^+ است. به این ترتیب، خاصیت جدیدی از حفره‌ها را می‌یابیم که یکی گرفتن حفره و پوزیترون را باورکردنی تر می‌کند.

فرض جدید وقتی کاملاً راضی‌کننده است که سؤال در مورد ناحیه‌ای از فضا باشد که در آن هیچ میدانی نیست، و فرق بین حالت انرژی مثبت و حالات انرژی منفی به دقت تعریف شده باشد؛ اما این را نیز باید مشخص کرد که وقتی در ناحیه‌ای از فضا میدان صفر نیست چه طور می‌توان به جوابی دور از هر گونه ابهام رسید. ما باید به زبان ریاضی مشخص کنیم که چه توزیعی از الکترون‌ها هیچ میدانی تولید نمی‌کند، و هم‌چنین باید قاعده‌ای برای کم کردن چنین توزیعی از آن چه که به طور مؤثر در هر مسئله‌ی مشخصی وجود دارد بدهیم، به طوری که تفاضلی محدودی برای آن چه در معادله (1) وارد می‌شود داشته باشیم زیرا در حالت کلی کم کردن دو مقدار بی‌نهایت ابهام دارد.

مسئله برای حالت کلی یک میدان الکترومغناطیسی دلخواه حل نشده است. اما، یک وضعیت خاص هست که در آن فرض لازم به حد کافی واضح به نظر می‌رسد: وضعیت میدان الکترواستاتیکی پایدار. این وضعیت را با این فرض بررسی می‌کنیم که میدان آن قدر ضعیف هست که بتوان از روش اختلالی استفاده کرد. ثابت خواهیم کرد که توزیعی که هیچ میدانی تولید نمی‌کند معادله‌های حرکت را ارضا نمی‌کند. با کم کردن این توزیع از آن چه معادله‌های حرکت را ارضا می‌کند و مربوط به حالتی است که در آن نه الکترونی هست نه پوزیترونی، تفاضلی پیدا خواهیم کرد که می‌توان آن را یک جور اثر قطبش ناشی از میدان الکتریکی حاصل از توزیع الکترون‌های منفی انگاشت.

از روش تقریب هارتری⁽⁴⁾ - فُک⁽⁵⁾ استفاده می‌کنیم که به هر الکترونی تابع موج $\psi(q)$ مجزای خودش را نسبت می‌دهد، و ماتریس چگالی R را به صورت

$$(q'|R|q'') = \sum_r \bar{\psi}_r(q') \psi_r(q''),$$

تعریف می‌کنیم که در جمع همه‌ی الکترون‌ها، یعنی همه‌ی حالات اشغال شده، به حساب می‌آیند. تا حد دقت روش هارتری - فُک، هر توزیعی از الکترون‌ها را می‌توان با چنین ماتریسی مشخص کرد. این نمایش نسبتی نیست، زیرا مقادیر q' و q'' متغیرهای وابسته به یک عنصر ماتریس R ، هم‌زمان به دو نقطه‌ی مختلف فضا مربوط اند. با این حال، این نمایش برای مسئله‌ی واقعی ما خوب است.

معادله حرکت R به شکل

$$i\hbar \dot{R} = HR - RH, \quad (2)$$

است.² H همیلتونی الکترونی است که در یک میدان الکتریکی حرکت می‌کند،

Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 1929, p. 62, & 26 1930, p. 376.

2

$$H = c\rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2 - eV,$$

ρ_3 و ρ_1 ماتریس‌های معمولی اسپین اند، و V پتانسیل الکترواستاتیکی است. V باید شامل قسمتی باشد که نماینده میدان ناشی از حضور الکترون‌های دیگر است. شرط آن که توزیع چنان باشد که اصلی طرد ارضا شود این است که

$$R^2 = R. \quad (3)$$

فرض کنید R_0 توزیعی باشد که بنا به فرض میدانی تولید نمی‌کند. ساده‌ترین فرض برای R_0 این است که

$$R_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{W}{|W|} \right), \quad (4)$$

که در این جا W انرژی جنبشی الکترون است:

$$W = c\rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2.$$

این نشان می‌دهد که در نمایش ماتریسی‌ای که در آن W قطری است، R_0 هم قطری است، و عناصر قطری‌اش، بسته به این که W مثبت و یا منفی باشد، یا 1 اند. انرژی جنبشی W است که در رابطه‌ی (4) وارد می‌شود، نه انرژی کلی H ؛ زیرا در حالت دوم رابطه‌ی (4) با اضافه کردن یک ثابت به پتانسیل الکترونیکی که هیچ معنی فیزیکی ندارد عوض می‌شود.

حالت دائمی‌ای را در نظر بگیریم که برای آن معادله‌ی (2) به صورت

$$0 = HR - RH \quad (5)$$

در می‌آید. این معادله، جز در حالتی که V ثابت است، در $R^2 = R$ صدق نمی‌کند. فرض کنیم V مقداری کوچک از رتبه‌ی اول است، و دنبال جوابی به شکلی $R = R_0 + R_1$ برای (3) و (5) بگردیم، که در آن R_1 کمیتی از رتبه‌ی اول است. با چشم‌پوشی از جملات رتبه‌ی دوم، معادله‌ی (5) می‌دهد:

$$\begin{aligned} 0 &= (W - eV)(R_0 + R_1) - (R_0 + R_1)(W - eV) \\ &= WR_1 - R_1W - e(VR_0 - R_0V). \end{aligned} \quad (6)$$

می‌توان عملگر $|W|$ را به صورت جذر مثبت W^2 ، یا $m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2$ ، تعریف کرد. بنا بر این

$$|W| = c(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}.$$

اگر بگذاریم

$$\frac{W}{|W|} = \gamma,$$

خواهیم داشت

$$W = c\gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}.$$

و بنا بر این

$$R_0 = \frac{1}{2}(1 - \gamma).$$

در نتیجه معادله‌ی (6) را می‌توان این طور نوشت:

$$\gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}R_1 - R_1\gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{e}{c}(\gamma V - V\gamma). \quad (7)$$

از معادله‌ی (3) می‌یابیم

$$(R_0 + R_1)^2 = R_0 + R_1,$$

$$R_0R_1 + R_1R_0 = R_1,$$

که ساده می‌شود به

$$\gamma R_0 + R_1\gamma = 0.$$

با استفاده از این معادله، و معادله‌ی $\gamma^2 = 1$ ، و با ضرب کردن دو طرف معادله‌ی (7) در γ ، می‌رسیم به:

$$(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}R_1 + R_1(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{e}{c}(V - \gamma V\gamma).$$

کمیت مورد علاقه‌ی ما چگالی بار الکتریکی مربوط به توزیع R_1 است. برای به دست آوردن آن باید جمع عناصر قطری R_1 ، نسبت به متغیرهای اسپینی، را بسازیم، و سپس عنصر عمومی قطری ماتریس نهایی را، که در $-e$ ضرب شده، نسبت به متغیرهای مکان x تعیین کنیم. اگر D معرف جمع عناصر قطری نسبت به متغیرهای اسپینی باشد، پس از محاسبه‌ی ساده‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}D(R_1) + D(R_1)(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{e}{c}D(V - \gamma V\gamma) \\ &= 2\frac{e}{c}\left\{V - \frac{1}{(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}}[(\mathbf{p}, V\mathbf{p}) + m^2c^2V] \frac{1}{(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}}\right\}. \end{aligned}$$

حال اگر از نمایشی که در آن ماتریس ممتنم p قطری است استفاده کنیم، و اگر در این وضعیت $(p'|D(R_1)|p'')$ به معنی جمله‌ی عمومی $D(R_1)$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} & (m^2 c^2 + p'^2)^{1/2} (p' |D(R_1)| p'') + (p' |D(R_1)| p'') (m^2 c^2 + p''^2)^{1/2} \\ & = 2 \frac{e}{c} (p' |V| p'') \left\{ 1 - \frac{1}{(m^2 c^2 + p'^2)^{1/2}} [(p', p'') + m^2 c^2] \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{(m^2 c^2 + p''^2)^{1/2}} \right\}, \end{aligned}$$

که می‌دهد

$$(p' |D(R_1)| p'') = 2 \frac{e}{c} (p' |V| p'') \frac{1 - \frac{(p', p'') + m^2 c^2}{(m^2 c^2 + p'^2)^{1/2} (m^2 c^2 + p''^2)^{1/2}}}{(m^2 c^2 + p'^2)^{1/2} + (m^2 c^2 + p''^2)^{1/2}}. \quad (8)$$

حال می‌توانیم $D(R_1)$ را به نمایشی که در آن متغیرهای مکانی قطری هستند ببریم، و آن جا عنصر قطری را حساب کنیم. با استفاده از قوانین عادی تبدیلات، می‌رسیم به

$$(x |D(R_1)| x) = \frac{1}{h^3} \int \int \exp [-i(\mathbf{x}, \mathbf{p}' - \mathbf{p}'')/h] (p' |D(R_1)| p'') dp' dp''. \quad (9)$$

حالا چون V تنها تابعی از متغیرهای مکانی x است، و نه ممتنم p ، $(p' |D(R_1)| p'')$ باید تنها به اختلاف $\mathbf{p}' - \mathbf{p}''$ بستگی داشته باشد. در نتیجه اگر ما طرف دوم (8) را در (9) جای گذاری کنیم، و اگر متغیرهای انتگرال گیری را $\mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ و $\mathbf{p}' - \mathbf{p}''$ بگیریم، می‌توانیم نتیجه‌ی انتگرال گیری روی $\mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ را، برای V دلخواه ببینیم. نتیجه شامل یک لگاریتم بی‌نهایت است.

در وهله‌ی اول، شاید فکر کنیم حضور بی‌نهایت نظریه را غیر قابل قبول می‌کند. اما، نباید تصور کنیم که نظریه را می‌توان در مسئله‌ای با انرژی‌های بیش از $137 mc^2$ به کار برد، و به نظر می‌رسد معقولانه‌ترین راه برای پیش بردن کار آن باشد که محدوده‌ی انتگرال گیری روی $(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')^{1/2}$ مربوط به انرژی الکترون، را عمداً تا رتبه‌ی اشاره شده محدود کنیم. از لحاظ فیزیکی، این یعنی بپذیریم که توزیع ناشی از الکترون‌هایی که انرژی‌شان کم‌تر از $137 mc^2$ است، منجر به قطبش ناشی از میدان الکتریکی، به آن ترتیبی که گفتیم، نمی‌شود. عدد دقیقی که به این حد انرژی نسبت می‌دهیم اهمیت زیادی ندارد، زیرا تنها لگاریتم این اندازه وارد فرمول‌ها می‌شود.

اگر P اندازه‌ی بردار ممتنم $(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')^{1/2}$ باشد که ما ناحیه‌ی انتگرال گیری را به آن محدود کرده‌ایم، جواب نهایی، پس از یک انتگرال گیری پیچیده، می‌شود:

$$-e(x |D(R_1)| x) = -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{2}{3\pi} \left(\log \frac{2P}{mc} - \frac{5}{6} \right) \rho - \frac{4}{15\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \nabla^2 \rho, \quad (10)$$

که در آن ρ چگالی الکتریکی‌ای است که پتانسیل V را تولید می‌کند، یعنی

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho,$$

و در این جا [یعنی در (10)] از جمله‌های شامل مشتقات رتبه‌ی بالاتر از دوم ρ صرف نظر شده است.

دومین جمله‌ی (10)، چگالی بار الکتریکی‌ای را می‌دهد که ناشی از قطبشی است که اثر میدان روی توزیع الکترون‌های انرژی منفی ایجاد می‌کند. جمله‌ی مهم جمله‌ی اول است، که، برای $P/mc = 137$ ، به وضوح $\rho(e^2/\hbar c) - (1/137)\rho$ است. این یعنی چگالی ناشی از قطبش تنها در نزدیکی جایی است که میدان توزیع باری ایجاد می‌کند، و این که چگالی القاء شده در آن جا یک مضرب $1/137$ چگالی ناشی از میدان را خنثا می‌کند. جمله‌ی دوم در طرف دوم (10) تنها وقتی معرف یک تصحیح مهم است که چگالی ρ با تغییر مکان شدیداً تغییر کند، [یعنی] در فاصله‌ای از مرتبه‌ی \hbar/mc مقدار قابل ملاحظه‌ای تغییر کند.

یک نتیجه‌ی محاسباتی که هم‌اینک آمد این است که به نظر می‌رسد بار الکتریکی که به طور عادی برای الکترون، پروتون، یا ذرات باردار دیگر مشاهده می‌شود بار واقعی حمل‌شده توسط این ذرات که در معادله‌های بنیادی وارد می‌شود نیست، بل که به نسبت تقریباً 136 به 137 کوچک‌تر است. برای فرآیندهایی که اجازه‌ی مبادله‌ی انرژی از مرتبه‌ی mc^2 را می‌دهند، احتمالاً آن قدر وقت نیست که قطبش الکترون‌های انرژی منفی کاملاً تثبیت شود، بنا بر این باید انتظار داشته باشیم بار مشاهده شده به مقدار واقعی نزدیک باشد. وقتی انرژی‌هایی از رتبه‌ی mc^2 نقش دارند، در بعضی از عبارت‌ها انحرافی از مقدار واقعی بار از مرتبه‌ی 1 در 1000 نتیجه می‌شود؛ مثلاً در جمله‌های فرمول کلاین⁽⁶⁾ - نیشینا⁽⁷⁾، یا فرمول پخیش رادرفورد⁽⁸⁾. وقتی تحقیق تجربی این فرمول‌ها به اندازه‌ی کافی دقیق شود، خواهیم دید فرضیه‌ی تولید میدان توسط توزیع الکترون‌های انرژی منفی با چه دقتی درست است.

بحث در مورد گزارش دیراک

پایژلز - من مسئله‌ی قطبش خلأ توسط میدان مغناطیسی را با روشی کاملاً متفاوت از روش دیراک بررسی کرده‌ام. مثل نظریه‌ی حفره‌ها، مسئله محاسبه‌ی اختلاف دو انتگرال واگرا و بی‌نهایت است. سئوالی که مطرح می‌شود این است که: چه طور می‌توان تناظری بین حالت‌های جرم منفی الکترون‌ها در بیرون میدان با [حالت‌های جرم منفی الکترون‌ها] در درون میدان برقرار کرد. من تناظر را بین حالت‌هایی گرفتم که منتمم خطی‌شان یکی است.

نتایج من با مال دیراک فرق دارد، اما چون انتخاب من از نظر نسبیتی ناوردا نیست، نمی‌خواهم اهمیت فیزیکی‌ای به آن نسبت دهم. تناظر کامل، (مقایسه‌ی حالاتی که انرژی یکی است)، تنها برای میدان الکتریکی ثابت تحمیل می‌شود.

اگر به شکل خوش‌تعریفی می‌شد با توابع موج کار کرد، آن وقت می‌توانستیم از این گرفتاری، که به مختصه‌های حفره‌ها، یعنی پوزیترون‌ها، بسته‌گی دارد خلاص شویم؛ اما متأسفانه نظریه‌ی کنونی اجازه‌ی دنبال کردن این ایده را نمی‌دهد.

پاولی - نظریه‌ی حفره، به دلیل نقشی که اصل طرد در آن بازی می‌کند، همیشه به نظر جالب آمده.

این اصل پیش‌تر یک قانون منزوی بود، یعنی اعتبارش مستقل از بقیه‌ی پایه‌های مکانیک کوانتومی بود؛ در حالی که نظریه‌ی حفره‌ها، که توسط دیراک برای فرار از مشکلی جرم‌های منفی معرفی شده، اگر نمی‌خواستیم تمام توابع موجی را که پادمقارن نیستند دور بریزیم، محال می‌بود. با این حال، ظاهر کلی نظریه، به علت نحوه‌ی استفاده از مفهوم بی‌نهایت، راضی‌کننده نیست. حرف‌های دیراک و پایزل نشان داد که مشکل به صورت این واقعیت بیان می‌شود که آن‌ها باید دو انتگرال و اگر را از هم کم کنند. من دوباره روی مشکلی زیر تأکید می‌کنم: خلاً، در نظریه‌ی دیراک، حتی اگر بخواهیم جملاتی که مقادیر خیلی بزرگ انرژی را تولید می‌کنند حذف کنیم، یک مقدار مشخص بی‌نهایت دارد. می‌توانیم امیدوار باشیم که نظریه به شکلی تصحیح خواهد شد که بتوان از انرژی مشخص خلاً بدون ابهام صحبت کرد. در حال حاضر به این سؤال پاسخ داده نشده است، و حتی نحوه‌ای که مسئله‌ی قطبش و مسئله‌ی انرژی مشخص خلاً مطرح می‌شوند، به نظر من راضی‌کننده نیست. در باره‌ی توزیع چگالی بار حول الکترونی که دیراک درباره‌اش صحبت می‌کند، فکر می‌کنم به علت اثرش بر الکترون‌های پوسته‌ی K ی-اتم بتوان به دنبال یک تأیید تجربی دیگر هم رفت. مشکل این است که اندازه‌ی نظری اثر پوششی در این لایه با دقت زیاد معلوم نیست.

آقای دیراک پاسخ دادند که محاسبه‌ای در مورد مقدار این اثر انجام نداده‌اند.

بور⁽⁹⁾ - من نفهمیدم که بالاخره تأیید تجربی این نتیجه‌های نظریه‌ی حفره‌ها ممکن هست یا نه. همان طور که در جریان صحبت عمومی‌ای که خواهم داشت با جزئیات توضیح خواهم داد، نظریه‌ی دیراک اساساً در کلیتش یک خصلت تقریبی دارد و، در اطراف این مسئله، باید انتظار داشت که بعضی از آثار کوچک نسبت به e^2/hc هیچ معنی خوش‌تعریفی نداشته باشند.

در این جا هم دوباره مسئله‌ی اعتبار قانون کلاسیک - نیشینا مطرح می‌شود. علی‌رغم نظری که در کنگره‌ی سال 1931 رُم ابراز کردم، حالا فکر می‌کنم اگر طول موج‌های بلند فوتون از همان رتبه‌ی شعاع الکترون شود (یعنی $h\nu$ تقریباً برابر $137mc^2$ شود) باید اعتبار آن را کنار گذاشت. در واقع، در بحثی با آقای لاندائو⁽¹⁰⁾ متوجه ایرادی در استدلال شدم: اثر کامپتون⁽¹¹⁾ را در چارچوب مرجعی در نظر می‌گیریم که در آن مرکز ثقل الکترون و فوتون ساکن است، و در آن طول موج فوتون فرودی به طور قابل ملاحظه‌ای از مقدارش در چارچوب عادی بزرگ‌تر است. زیرا در هر چارچوب مرجعی، در ناحیه‌ی ذکر شده است که نیروهای تابشی از همان رتبه‌ی بزرگی نیروهای لختی اند. اما آقای دیراک گفت که برای طول موج‌های کوتاه، تغییراتی در فرمول کلاسیک - نیشینا پیش‌بینی می‌کند، زیرا قطبش خلاً نوسان‌های شدید نیروهای الکترومغناطیسی را دنبال نمی‌کند. آیا امکان ندارد که تغییرات [قطبش] به دلیل قید عمومی‌ای که هم‌اینک بر شرمدم، از تأیید تجربی بگریزد؟

دیراک - من محاسبات لازم را هنوز انجام نداده‌ام. به عقیده‌ی من ناهنجاری‌ها تقریباً از همان وقتی که طول موج فوتون از رتبه‌ی h/mc می‌شود شروع می‌شوند. طول موج بحرانی‌ای که آقای بور از آن صحبت می‌کند با یک ضریب 137 کوچک‌تر است.

پاولی - از آن جا که مقدار انحراف برای طول موج h/mc که آقای دیراک پیش‌بینی می‌کند تنها از رتبه‌ی $1/137$ است، استدلال آقای بور هنوز معتبر است.

آقای پاولی اطلاعاتی می‌خواست در مورد فرمول نظری‌ای که تولید یک الکترون و یک پوزیترون به وسیله‌ی فوتونی در میدان کولنی یک هسته را می‌دهد. در چه ناحیه‌ای چنان فرمول معتبر است؟

هایزنبرگ - فرمول مورد سؤال تقریب‌هایی را ایجاب می‌کند، مثلاً این که فقط برای $h\nu$ از رتبه‌ی mc^2 معتبر است. از طرف دیگر، باید انتظار داشته باشیم وقتی $h\nu$ از رتبه‌ی $137mc^2$ می‌شود اعتبارش را از دست بدهد. اُپنهایم و پلسه⁽¹²⁾ سطح مقطع، را در شکلی دقیقش، می‌دهند:

$$\sigma = \frac{e^2}{hc} \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2. \quad (1)$$

آقای ساتر⁽¹³⁾ متوجه شد که آن‌ها در محاسبات‌شان مرتکب اشتباه‌هایی شده‌اند و فرمول درست باید این باشد:

$$\sigma = 2 \frac{e^2}{hc} \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2 \log \frac{h\nu}{mc^2}. \quad (2)$$

لازم به توضیح است که این فرمول تقریباً شبیه فرمولی است که هایتلر⁽¹⁴⁾ برای سطح مقطع به دست آورده بود، که همان عبارت انرژی از دست رفته‌ی الکترونی است که در میدان کولنی یک هسته نفوذ می‌کند:

$$\sigma = \frac{3}{4} \frac{e^2}{hc} \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2 \log \frac{E}{mc^2}, \quad (3)$$

که در آن E انرژی الکترون تابیده است. فرمول آخر منجر به توان نفوذی در ماده می‌شود که، راستش، خیلی کوچک است.

اما ما ملاحظه کردیم که جمله‌ی لگاریتمی در (3) از تابش گسیل شده از الکترونی می‌آید که از فاصله‌ی به قدر کافی دوری از هسته عبور می‌کند، اما در کلی پدیده مشارکتی ندارد. اما، در این فواصل، اگر راستش را بخواهید، الکترون‌های اتمی میدان هسته را می‌پوشانند. آقای لاندائو در جستجوی آن است که با در نظر گرفتن آن شرایط پدیده را ارزیابی کند. او فرمول زیر را پیدا کرده

$$\sigma \cong \frac{e^2}{hc} \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2 Z^{5/3} \log \frac{hc}{e^2 Z^{1/3}}, \quad (4)$$

که به ما می‌گوید توان نفوذی بستگی به انرژی الکترون ندارد. (در این جا آقای پایزلز می‌گوید ملاحظات شبه-کلاسیکی که آقای لاندائو استفاده می‌کند به حد کافی قابل اعتماد نیست.) شباهت بین (2) و (3) من را به این سمت هدایت می‌کند که فکر کنم فرمول (2) هم اشتباه است و ما باید آن را با فرمولی از نوع (4) عوض کنیم. اگر اعتبار (4) را بپذیریم، نتیجه می‌گیریم که نه فوتون و نه الکترون، هیچ کدام نمی‌توانند بیش از چند ده سانتی متر در سرب نفوذ کند.

نام‌های خاص

- 1) Wilson, 2) J. R. Oppenheimer, 3) R. Peierls, 4) D. R. Hartree, 5) V. Fock, 6) O. Klein, 7) Y. Nishina, 8) Rutherford, 9) N. Bohr, 10) L. D. Landau, 11) A. H. Compton, 12) Plesser, 13) Sauter, 14) W. Heitler

هیلمبرت¹ علاوه بر درس، معمولاً سمیناری را هم با هم‌کاری ی. مینکفسکی² هدایت می‌کرد. در 1905، پس از یک سال فیزیک خواندن، هیلمبرت و مینکفسکی تصمیم گرفتند سمینار را به موضوع خاص ی در فیزیک اختصاص دهند: الکترودینامیک جسم‌ها ی متحرک. با آن که ایده ی اصلی از مینکفسکی بود، هیلمبرت فعالانه شرکت می‌کرد و واقعاً یک پا ی بحث بود. بُرن³ می‌گوید ”اغلب روشن‌گر بود، و همیشه [ما را] به سمت وضوح می‌راند.“ جلسه‌ها ی سمینار برا ی بُرن و دیگر دانش‌جوها هیجان‌انگیز و برانگیزاننده بود. انقلاب ی فیتزجرالد⁴، زمان موضعی ی لُرنِتس⁵، آزمایش مایکلسون⁶ - مورلی⁷، راجع به همه به دقت بحث شد. ”چیزها ی واقعاً جالب ی در الکترودینامیک می‌شنیدیم.“

در یک ی از آن اتفاقات‌ها یی که در تاریخ علم خیلی نادر نیست، در همان سال ایده‌ها ی مشابه ی در باره ی الکترودینامیک و نسبیت در مقاله‌ها ی یک کارمند اداره ی ثبت اختراعات یرن⁸ ظاهر شد. اما آن طور که بُرن می‌گوید ”در گُتینگن⁹ و در سمینارها ی هیلمبرت - مینکفسکی هرگز اسم ی از اینشتین نیامد.“

Reid, Constance: *Hilbert*, Springer, 1970, p. 105.

- 1) D. Hilbert, 2) H. Minkowski, 3) M. Born 4) G. F. FitzGerald, 5) H. A. Lorentz, 6) A. A. Michelson, 7) E. W. Morley, 8) Bern, 9) Göttingen