

به دست آوردن قانون القا ی فارادی از معادله‌ها ی الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک و نوردایی ی گالیه‌ای

احمد شریعتی

در این مقاله ی آموزشی نشان می‌دهیم که قانون القا ی فارادی را می‌توان از معادله‌ها ی الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک و نوردایی ی گالیه‌ای به دست آورد. در کتاب معروف جکسن^(۱)، قانون القا ی فارادی در دو مرحله عرضه می‌شود: (۱) با تکیه بر تجربه معادله ی

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (1)$$

یا معادلاً

$$\text{curl } \mathbf{E} = -k \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

نوشته می‌شود، و (۲) با نوشتن شرط هموردایی ی گالیه‌ای ی (شکل انتگرالی ی) معادله‌ها، ضریب k به دست می‌آید (که در دست‌گاه SI برابر است با یک). در این نوشته نشان می‌دهیم که از شرط هموردایی ی گالیه‌ای ی معادله‌ها ی الکتروستاتیک، مغناطوستاتیک، و گالیه‌ناوردا بودن نیرو می‌توان قانون القا ی فارادی را به دست آورد.

دو دست‌گاه لخت K و K' را در نظر بگیرید. فرض کنید K' با سرعت \mathbf{v} نسبت به K حرکت کند. ذره ی باردار ی در K' ساکن است^(۲). نیرویی که به این بار وارد می‌شود هست

$$\mathbf{F}' = q \mathbf{E}'. \quad (3)$$

این ذره در K با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند، و نیرویی که به آن وارد می‌شود هست

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

نیرو ناوردا ی گالیه‌ای است (یعنی در هر دو دست‌گاه یک ی است)، پس

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

اینک ذره ای در نظر بگیریم که در دست‌گاه K' با سرعت \mathbf{u}' حرکت کند. سرعت این ذره در K هست $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$. از ناوردایی \mathbf{u} نیرو داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \\ \mathbf{E} + \mathbf{u}' \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \\ \mathbf{u}' \times \mathbf{B} &= \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'.\end{aligned}\quad (6)$$

چون این اتحاد باید برای هر \mathbf{u}' درست باشد، باید داشته باشیم

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}.\quad (7)$$

پس قانون تبدیل گالیه‌ای \mathbf{E} و \mathbf{B} را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{cases}\quad (8)$$

میدان ایستایی در K' در نظر بگیریم. ایستا بودن به این معنی است که

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0, \quad \text{curl}' \mathbf{E}' = 0,\quad (9)$$

پس داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{B} \qquad \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{B} = -\text{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{curl}(\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{curl} \mathbf{E}\end{aligned}\quad (10)$$

از این اتحاد نتیجه می‌گیریم که اگر میدان‌ها در K' ایستا باشند، در K باید داشته باشیم

$$\text{div} \mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} \rho,$$

$$\text{curl} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (11)$$

اما شاید نتوان دست‌گام لخت‌ی یافت که در آن میدان‌ها ایستا باشند. مثلاً اگر تعدادی بار با سرعت‌ها‌ی ثابت - مختلف حرکت کنند، میدان - حاصل در هیچ چارچوب - لخت‌ی ایستا نیست. اما، بنا بر اصل - برهم‌نهی، میدان - حاصل برهم‌نهی -ی میدان‌هایی است که استدلال - بالا برای - هر کدام از آن‌ها درست است. پس، معادله‌ها‌ی - بالا در حالت - کلی باید درست باشند. ببینیم مسیر - استدلال‌ی که کردیم چه بود:

(۱) نوردایی‌ی - نیرو را پذیرفتیم، و از این جا قانون - تبدیل - میدان‌ها‌ی - الکتریکی و مغناطیسی را یافتیم.

(۲) میدان‌ی را در نظر گرفتیم که در یک دست‌گام - لخت ایستا باشد. قانون - تبدیل - گالبله‌ای‌ی - میدان‌ها را به کار بردیم و به این ترتیب به قانون - القا‌ی - فارادی رسیدیم.

یادداشت‌ها

¹⁾ J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*; 3rd edition, John Wiley & Sons, 1999, pp. 208-211.

²⁾ واضح است که اگر تنها نیرویی که به ذره وارد می‌شود نیروی - الکتریکی باشد، ذره شتاب می‌گیرد، و سرعت اش دیگر صفر نخواهد ماند. اما استدلال‌ی که در این جا می‌کنیم ربط‌ی به این شتاب گرفتن - ذره ندارد.