

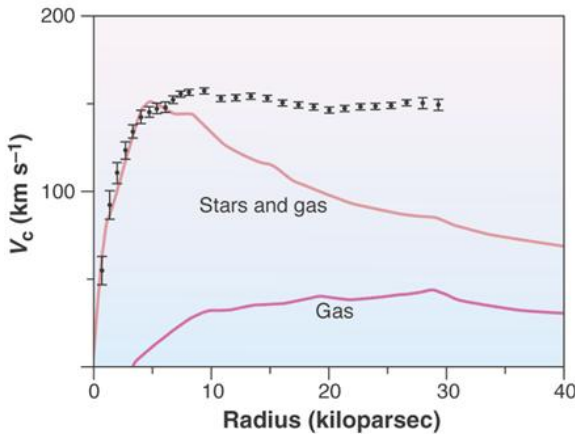
## مادّه ی تاریک، یا مُند؟

احمد شریعتی، نصرت‌الله جعفری

برای توضیح مسئله ی تخت شدن منحنی ی سرعت ستاره‌ها ی کهکشان‌ها ی ماریپچی دوره‌یافت عمده هست: یک ی مادّه ی تاریک و دیگری تغییر دادن قانون دینامیک نیوتنی. پس از مرور این دوره‌یافت، دوپیش‌رفت اخیر در مورد انتخاب تجربی بین این دوره‌یافت بازگو می‌شود.

### 1 مقدمه

کهکشان راه‌شیری ماریپچی است، به این معنی که ستاره‌ها ی این کهکشان عمدتاً در یک قرص اند، و این قرص از چند بازو ی ماریپچی شکل ساخته شده است. ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان می‌گردند، و مدار هر کدام از آن‌ها با تقریب خوب ی دایره است. می‌توان سرعت حرکت ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان را سنجید. معلوم شده است که این سرعت، برای ستاره‌ها یی که بیش از حدود 10 kpc از مرکز کهکشان دور اند ثابت و حدود 150 km/s است ( $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$ ). این عجیب است، زیرا انتظار داریم که سرعت ستاره‌ها با افزایش فاصله از مرکز کهکشان کم شود. در واقع، در یک منظومه ی کپلری، یعنی منظومه ای که در آن یک جسم بسیار سنگین در مرکز است، و اجسام ی بسیار سبک‌تر به دور آن می‌گردند،  $v = \sqrt{GM/r}$  است. کهکشان‌ها ی ماریپچی ای مثل کهکشان ما البته کاملاً کپلری نیستند، اما اگر دقت کنیم که جرم برآمده گی ی مرکزی ی کهکشان (که کره‌شکل است) کسر مهم ی از جرم قرص کهکشان است، آن وقت انتظار داریم که باز هم  $v$  تابع ی نزولی از  $r$  باشد. اما  $v(r)$  ی که دیده می‌شود تخت است. چرا؟ این مشکل را مشکل «تخت بودن منحنی ی چرخش کهکشان‌ها ی ماریپچی» می‌گویند. برای حل این مشکل راه‌ها ی مختلف ی پیش‌نهاد شده است.



شکل ۱: منحنی ی- چرخش - (10) NGC 3198 که کهکشان ی مارپیچی است. شتاب - مرکزگرا را گرانس تأمین می کند. نقطه چین منحنی ی- مشاهده شده است. اگر فقط گازها ی- کهکشان را به حساب بیاوریم منحنی باید به شکل ی که در شکل با Gas مشخص شده باشد. اگر گازها و ستاره ها را به حساب آوریم، منحنی باید به شکل ی که با Stars and gas مشخص شده در آید. (شکل از مرجع - 2 برداشته شده است.)

## 2 ماده ی - تاریک - کهکشانی

نخستین راه این است: فرض کنیم که در کهکشان ها، علاوه بر ماده ی - مرئی، ماده ای نامرئی (یا تاریک) هم هست. چگالی ی- زیر را در نظر بگیرید.

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-1/2} \quad (1)$$

در این فرمول،  $b$  و  $\rho_0$  ثابت اند، و  $r$  فاصله از مرکز - کهکشان است. دقت کنید که  $\rho(0) = \rho_0$  متناهی است (تکین نیست). این  $\rho_0$  بیشینه ی-  $\rho(r)$  است، و  $\rho(b) = \frac{1}{2}\rho(0)$ ، که یعنی  $b$  فاصله ای است که در آن فاصله (از مرکز - کهکشان) چگالی نصف - مقدار - چگالی در مرکز - کهکشان می شود. ضمناً، توجه کنید که این توزیع تقارن - کروی دارد، بنا بر این فقط محدود به صفحه ی- کهکشان (یعنی قرص - کهکشان) نیست. ضمناً دقت کنید که چگالی ی- کل جمع - این چگالی و چگالی ی- ماده ی- مرئی است. ماده ی- مرئی در مرکز - کهکشان، و در قرص - کهکشان متمرکز است. فعلاً، برای ی- ساده تر شدن - فرمول ها، این دو بخش را نادیده بگیریم.

خوب است احساس ی از مقدار پارامترها داشته باشیم. برای کهکشانی ما این پارامترها بسیار مناسب اند [1]:

$$b = 5.0 \text{ kpc} = 1.5 \times 10^{20} \text{ m} \quad (2)$$

$$\rho_0 = 1 \frac{\text{GeV}}{c^2} \frac{1}{\text{cm}^2} = 2 \times 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}. \quad (3)$$

توجه کنید که  $\rho_0$  حدود  $10^{-20}$  برابر چگالی ی هوا است! اما همین عدد کوچک، همان طور که به زودی خواهیم دید، اثری فوق العاده بر جرم کهکشان دارد. جرم ی که در کره ای به شعاع  $r$  هست را می توان حساب کرد.

$$M(r) = 4\pi \int_0^r ds s^2 \rho(s) = 4\pi \rho_0 b^3 \left( \frac{r}{b} - \tan^{-1} \frac{r}{b} \right). \quad (4)$$

دقت کنید که  $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty$  است، بنا بر این قاعدتاً چگالی ی جرم نمی تواند تا بی نهایت به این شکل باشد. از یک  $r$  ی به بعد باید چگالی کم شود. اما ضمناً دقت کنید که  $M(20b)$  یعنی جرم ی که در کره ای به شعاع  $20b = 100 \text{ kpc}$  برابر است با  $8.3 \times 10^{11} M_\odot$ ، که تقریباً ده برابر جرم ستاره ها ی راه شیری است! ( $M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$  جرم خورشید است). دقت کنید که این جرم ماده ی تاریک است، نه جرم کل.

حرکت یک ستاره را بررسی کنیم. به علت تقارن کروی ی چگالی ی جرم، واضح است که باز هم داریم  $v(r) = \sqrt{GM(r)/r}$ ، و محاسبه سراسر است.

$$v^2(r) = 4\pi G \rho_0 b^2 \left( 1 - \frac{b}{r} \tan^{-1} \frac{r}{b} \right), \quad (5)$$

و واضح است که

$$v_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = \sqrt{4\pi G \rho_0 b^2} = 200 \text{ km/s}. \quad (6)$$

پس پذیرفتن یک ماده ی تاریک با تقارن کروی، مشکل تخت بودن منحنی ی چرخش کهکشان را حل می کند.

ممکن است تقارن کروی ی این ماده ی تاریک برا یمان عجیب باشد. آیا می توان ماده ای تاریک با چگالی ای سطحی (در صفحه ی کهکشان) در نظر گرفت، به نحوی که منحنی ی سرعت ستاره ها تخت بشود؟ پاسخ مثبت است [1]، و البته باز هم دیده می شود که اندازه ی جرم تاریک بسیار زیاد است. اینک توجه کنیم که این ماده ی تاریک قاعدتاً باید ماده ای باشد که با مواد معمولی

تنها برهم‌کنش گرانشی داشته باشد. آن چه باعث شده کهکشان ما به شکل یک قرص در آید، برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی است. پس این فرض که ماده‌ی تاریک به شکل یک قرص در نیامده است فرضی معقول است. به همین علت است که مدل‌های کروی متقارن ماده‌ی تاریک کهکشان‌های مدلی خوب هستند.

### 3 مُند

راه دیگری که برای حل مشکل تخت بودن منحنی‌ی چرخش کهکشان‌های مارپیچی پیش‌نهاد شده، این است که دینامیک نیوتنی را عوض کنیم. البته، چون می‌دانیم که دینامیک نیوتنی را تمامی‌ی آزمایش‌هایی که تا کنون روی زمین انجام داده‌ایم تأیید می‌کنند، این اصلاح باید بسیار زیرکانه باشد. پیش از هر چیز خوب است توجه کنیم که شتاب ستاره‌هایی که سرعت آن‌ها را می‌خواهیم توضیح بدهیم بسیار کوچک است.

$$a_0 := \frac{v^2}{r} = \frac{(200 \text{ km/s})^2}{10 \text{ kpc}} \simeq 10^{-10} \text{ m/s}^2. \quad (7)$$

راه‌ی که میلگرم<sup>a</sup> در 1983 پیش‌نهاد کرده است [3] این است که فرض کنیم قانون دینامیک به‌جا‌ی  $F = ma$  به شکل  $F = ma\mu(a)$  باشد، که در این جا  $\mu(a)$  تابع‌ی است با این خاصیت که وقت‌ی  $a \gg a_0$  است،  $\mu \simeq 1$ ، و وقت‌ی  $a \simeq 0$  است،  $\mu(a) \simeq 0$  است. یک تابع ساده که این خاصیت را دارد  $\frac{a}{a+a_0}$  است. بگذارید با این تابع سرعت حرکت ستاره به دور مرکز کهکشان را حساب کنیم. حرکت را دایره‌ای می‌گیریم. می‌دانیم شتاب  $v^2/r$  است، و نیرو را  $GMm/r^2$  می‌گیریم. قانون  $F = ma\mu(a)$  می‌گوید

$$\frac{GMm}{r^2} = m \left( \frac{v^2}{r} \right) \frac{v^2/r}{v^2/r + a_0} \quad (8)$$

و از این جا

$$v^4 - \frac{GM}{r} v^2 - GM a_0 = 0 \quad (9)$$

این معادله دو حل دارد، که تنها یکی از آن‌ها مثبت است.

$$v^2(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{GM}{r} + \sqrt{\left( \frac{GM}{r} \right)^2 + 4GM a_0} \right]. \quad (10)$$

از این جا واضح است که

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = (GM a_0)^{1/4} =: v_\infty. \quad (11)$$

حال اگر بگیریم  $M = \beta \times 10^{10} M_\odot$ ، و  $a_0 = \alpha 10^{-10} \text{ m/s}^2$ ، آن وقت داریم

$$v_0 = (\alpha \beta)^{1/4} \times 110 \text{ km/s}. \quad (12)$$

پس می بینیم که این شکل - جدید - قانون - حرکت، که آن را مُند<sup>b</sup> می نامیم، پیش بینی می کند که منحنی ی - سرعت - ستاره ها ی - کهکشان از یک  $r$  ی به بعد تخت است.

$a_0$  ی که در مُند ظاهر می شود از مرتبه ی  $10^{-10} \text{ m/s}^2$  است. شتاب ی از این مرتبه در کیهان شناسی هم ظاهر می شود! ثابت - هابل<sup>c</sup> بُعد - عکس - زمان دارد، و بنا بر این حاصل ضرب - سرعت - نور در ثابت - هابل،  $cH$ ، بعد - شتاب دارد.

$$H \simeq 75 \text{ km/(s Mpc)} \simeq 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad cH = 7 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2 \quad (13)$$

بنا بر این چندان عجیب نیست که شتاب ی از این مرتبه به نحو ی وارد - فرمول ها ی - دینامیک شود. چه طور می توان این دو نظریه را آزمود و بین - آن دو یک ی را انتخاب کرد. یک راه این است که ببینیم این قانون آیا منجر به اثر ی مشاهده پذیر در منظومه ی شمسی می شود یا نه. با بسط دادن - (10) به ساده گی دیده می شود که

$$v^2(r) \simeq \frac{GM}{r} + a_0 r \quad (14)$$

و از این جا

$$v(r) \simeq \sqrt{\frac{GM}{r} + \frac{a_0 r^{3/2}}{2\sqrt{GM}}} \quad (15)$$

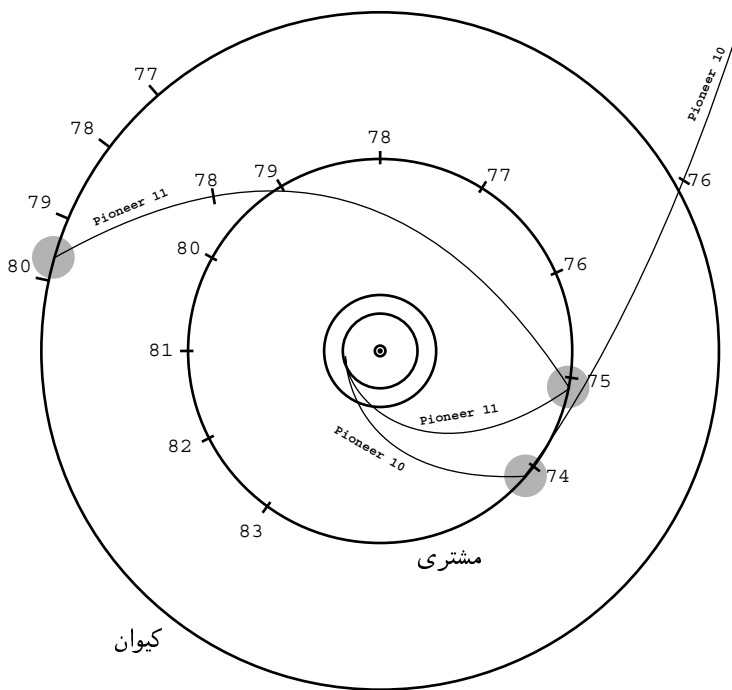
به ساده گی می توان حساب کرد که دوره ی - گردش - یک سیاره که روی - مدار ی دایره ای حرکت می کند می شود

$$T = \frac{2\pi r}{v(r)} = T_K \left( 1 - \frac{a_0 r^2}{2GM} \right) \quad (16)$$

که در این جا

$$T_K := \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}} \quad (17)$$

دوره ی - گردش - کپلری است. می بینیم زمان - گردش، یعنی  $T$ ، کم ی کم تر از مقدار - کپلری ی - آن (یعنی  $T_K$ ) است. برای ی زمین می شود حدود  $s \simeq 0.2 \times 10^{-8} T_K$  که چندان کوچک نیست. آیا



شکل ۲: مسیر پابونیرها ی 10 و 11 در منظومه ی شمسی (شکل تصویر مدار در صفحه ی مداری ی زمین است). عددها ی دورقمی سالها ی میلادی اند. دایره ها ی خاکستری مواجهه یا برخورد سفینه با سیاره را نشان می دهند. (شکل از روی شکل ی در سایت NASA کشیده شده است.)

نمی شود این اثر را سنجید؟ نه به ساده گی، زیرا اصولاً جرم خورشید را با پذیرفتن این که قانون کپلر<sup>d</sup> درست است می سنجیم، به این ترتیب که روی زمین  $G$  را می سنجیم، فاصله ی زمین از خورشید و دوره ی گردش زمین به دور خورشید را هم می سنجیم، و با استفاده از فرمول خواهد بود. برای سنجش  $a_0$  باید دوره ی سیاره ها ی مختلف با هم مقایسه شود، و این کار چندان ساده نیست، چرا که اختلال ها ی بسیاری را باید بر شمرد.

در فاصله ها ی دور از خورشید، مثلاً بیش از 50 AU، شتاب گرانش نیوتنی کم تر از  $10^{-6} \text{ m/s}^2$  است.  $1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  واحد نجومی است، و برابر است با فاصله ی زمین از خورشید. این هنوز  $10^4$  برابر  $a_0$  است، اما بعضی از طرف داران مُند امید دارند در این حدود آثار ی مشاهده پذیر

در تأیید مُند دیده شود. شتاب ناهنجار پایونیرها<sup>e</sup> طرفداران مُند را خوش حال کرد.

ماجرای شتاب ناهنجار پایونیرها این است. پایونیر 10 در دَومِ مارس 1972، و پایونیر 11 در پنجم آوریل 1973، برای کاوش در دوردست‌ها ی منظومه ی شمسی، از زمین پرتاب شدند. این دو سفینه، پس از چند مانور به بیرون منظومه ی شمسی پرتاب شدند. به دو سمت مختلف منظور از مانور برخورد با میدان گرانش یک سیاره است.

در این سفینه‌ها فرستنده‌ها بی هست که دائماً اطلاعات بارزش ی به زمین فرستاده است. ضمناً این سفینه‌ها امواج ی را که از زمین به آن‌ها می‌رسد به زمین باز می‌تابانند. گروه ی از پژوهش‌گران مسئول رصد کردن این دو سفینه بوده اند. منظور از رصد کردن این است که جا ی سفینه‌ها را دائماً دنبال کنند. تعیین جا ی سفینه به دو صورت انجام می‌شود: نظری و تجربی. از یک طرف معادله‌ها ی حرکت این دو سفینه مشخص است، زیرا تمام نیروها ی وارد بر آن‌ها (و از جمله نیرو ی رانش موشک‌ها شان) دانسته است. با انتگرال‌گیری از این معادله‌ها ی حرکت می‌توان جا ی سفینه‌ها را تعیین کرد. از سوی دیگر، با گرفتن و تحلیل کردن امواج ی که این سفینه‌ها به زمین می‌فرستند، می‌توان فاصله ی هر سفینه از زمین را هم تعیین کرد — منظور بازتاب امواج ی است که از ایستگاه‌ها ی زمینی به این سفینه‌ها تابیده، و این سفینه‌ها پس از تقویت کردن آن، آن را به زمین باز تابانده اند. پژوهش‌گران این تیم‌ها مدعی شده اند که بین مکان ی که از انتگرال‌گیری ی معادله‌ها به دست می‌آید و مکان ی که از رصد مستقیم سفینه‌ها به دست می‌آید یک اختلاف هست. این اختلاف را می‌توان به یک نیرو یا معادلاً یک شتاب نسبت داد. این شتاب، که آن را شتاب ناهنجار پایونیرها می‌گویند، حدود  $10^{-9} \text{ m/s}^2$  است!

در ابتدا ی سال 2005، پایونیر 10 در فاصله ی 89.91 AU از خورشید بوده که در این فاصله شتاب گرانش نیوتونی ی خورشید  $7.4 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$  است. بنا بر این، این شتاب ناهنجار پایونیر حدود 0.001 شتاب ی است که نظریه ی نیوتونی پیش‌بینی می‌کند.

در این جا خوب است توجه خواننده را به این نکته جلب کنیم که حتّاً اگر این ادّعا درست باشد، باز به آن معنی است که دینامیک نیوتنی با دقت بسیار خوب ی در منظومه ی شمسی پدیده‌ها را توضیح می‌دهد. برای این که این را بهتر ببینیم، خوب است اثر پایونیر را این طور بیان کنیم: اگر اختلال‌ها ی دانسته ای را که در منظومه ی شمسی هست (مثل اثر سیاره‌ها، فشار تابشی ی خورشید، فشار باد خورشیدی و غیره) به حساب آوریم، و معادله‌ها ی نیوتنی ی حرکت را به روش عددی حل کنیم (انتگرال‌گیری کنیم) در تعیین مسیر پیچیده ی پرتابه‌ها یی مثل پایونیرها ی 10 و 11، در

زمان ی به اندازه ی 30 سال، حد اکثر 0.001 طول مسیر اشتباه خواهیم داشت!

## 4 آزمایش

برای انتخاب یک ی از دو الگوی مُند یا ماده ی تاریک، خوب است این جا، روی زمین، آزمایش‌ها بی ترتیب بدهیم که اعتبار قانون دوم نیوتن، یا برعکس، اعتبار  $F = ma \mu(a)$  را بسنجیم. در چند ماه اخیر در این زمینه پیش‌رفت‌ها بی بوده است، هم پیش‌رفت‌ها ی نظری و هم پیش‌رفت‌ها ی تجربی.

### 4.1 پیش‌نهاد ایگناتیف

آلکساندر ایگناتیف از دانش‌گاه ملبورن<sup>(f)</sup> استرالیا آزمایش ی پیش‌نهاد کرده است [4]. ایده این است: ابتدا ببینیم فرمول  $F = ma \mu(a)$  در کدام دست‌گاه باید نوشته شود. یک نامزد خوب دست‌گاه ی است که مبداءش مرکز ککشان باشد و محورهایش به سمت اختروش‌ها ی دور دست باشند. این دست‌گاه را  $S_0$  می‌نامیم. در این دست‌گاه  $S_0$  شتاب مرکزجرم منظومه ی شمسی از مرتبه ی  $a_0$  است. اینک ذره ای را در نظر بگیریم که در یک آزمایش‌گاه روی زمین ساکن است (مثلاً یک آونگ که نوسان نمی‌کند). می‌توان شتاب این ذره را (نسبت به  $S_0$ ) حساب کرد. ایگناتیف استدلال می‌کند که در نقطه‌ها ی خاص ی از زمین (که به قطب‌ها ی زمین نزدیک اند)، در لحظه‌ها یی خاص (که بسیار به لحظه‌ها ی اعتدال بهاری و پاییزی نزدیک اند)، شتاب این جسم ساکن در آزمایش‌گاه، نسبت به  $S_0$  بسیار کوچک می‌شود. این صفر شدن شتاب (نسبت به  $S_0$ ) برای زمان ی از مرتبه ی 1s است. جسم پیش از رسیدن به این وضعیت نسبت به آزمایش‌گاه ساکن بوده، که معنی اش این است که برآیند نیروها ی وارد بر آن یک مقدار خاص بوده است. فرض بر این است که این نیروها با گذشت زمان 1s چندان تغییر نمی‌کنند. اما، معادله ی دیفرانسیل حاکم بر تحوّل، یعنی  $F = ma \mu(a)$ ، در مدّت ی از مرتبه ی  $10^{-3}$  s تغییر فاحش ی می‌کند. ایگناتیف نشان می‌دهد که به این ترتیب این جسم خاص، در این لحظه ی خاص، تکان ی می‌خورد.<sup>1</sup> تکان بسیار کوچک و در حدود  $10^{-16}$  m است [6] این یعنی تقریباً یک دهم قطر پرتون!

<sup>1</sup> آدم یاد خرافه ای می‌آفتد که در مورد لحظه ی اعتدال بهاری می‌گفته اند. نارنج ی را در ظرف آب ی بیندازید، در لحظه ی اعتدال بهاری می‌چرخد!



مقاله ی ایگناتیف هنوز در حد یک پیش نهاد است (پیش نهاد ی که شاید اصولاً به لحاظ عملی ناممکن باشد). اما گروه ی از پژوهش گران آزمایش دیگر ی طرح و اجرا کرده اند که آن هم اعتبار دینامیک نیوتنی را می آزماید.

## 4.2 آزمایش با ترازوی پیچشی

چند پژوهش گر با استفاده از ترازوی پیچشی ای که در دانش گاه واشینگتن<sup>(8)</sup> هست، آزمایش ی ترتیب داده اند [7]. آزمایش این است: میله ای صُلب با سیم ی از جنس تنگستن، به قطر  $20 \mu\text{m}$  و طول  $1.07 \text{ m}$  در خُلاً ( $P \sim 10^{-5} \text{ Pa}$ ) آویزان است. ثابت پیچشی ی فنر (سیم تنگستنی)  $\kappa = 2.36 \times 10^{-9} \text{ N m/Rad}$  و دوره ی تناوب این آونگ  $T = 795 \text{ s}$  است ( $\omega = 7.90 \times 10^{-3} \text{ Rad/s}$ ). این آونگ را با دامنه های در گستره ی  $A = 13 \mu\text{Rad}$  تا  $A = 19 \mu\text{Rad}$  به نوسان در آورده اند. شعاع مؤثر میان گین میله، که از توزیع جرم میله به دست آورده اند  $r_e = 0.023 \text{ m}$  است. در این دامنه، بیش ترین شتاب جسم  $A r_e \omega^2 = 2.7 \times 10^{-11} \text{ m/s}^2$  است. پیش بینی ی مُند این است که در این گستره، بس آمد با مقداری که دینامیک نیوتنی پیش بینی می کند فرق دارد. این گروه، با تحلیل دقیق آزمایش نتیجه گرفته اند که دینامیک نیوتنی و قانون هوک، تا شتاب های به کوچکی ی  $5 \times 10^{-14} \text{ m/s}^2$  معتبر اند.

## مرجع ها

1. Claus Grupen, *Astroparticle Physics*, Springer, 2005, pp. 266-269.
2. Ken C. Freeman, "The Hunt for Dark Matter in Galaxies", *Science*, vol. 302 (2003) no. 5652, pp. 1902-1903.
3. M. Milgrom, "A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis", *The Astrophysical Journal*, vol. 270 (1983), pp. 365-370, "A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies", *The Astrophysical Journal*, vol. 270 (1983), pp. 371-383,
4. A. Yu. Ignatiev, "Is Violation of Newton's Second Law Possible?", *Physical Review Letters*, vol. 98 (2007) 101101 (4 pages)

5. J. H. Gundlach, S. Schlamminger, C. D. Spitzer, and K.-Y. Choi “Laboratory Test of Newton’s Second Law for Small Accelerations” *Physical Review Letters*, vol 98 (2007) 150801 (4 pages)

## نام‌های خاص

<sup>a)</sup>M. Milgrom, <sup>b)</sup> MOND = Modified Newtonian Dynamics, <sup>c)</sup> Hubble, <sup>d)</sup> Pioneer 10, Pioneer 11, <sup>e)</sup> University of Melbourne (Australia), <sup>f)</sup> University of Washington, Seattle, Washington

پییر سیمون لاپلاس<sup>a)</sup> کودکی نابغه‌ای بود. در هجده‌سالگی استاد ریاضی مدرسه‌ی نظامی پاریس<sup>b)</sup> شد. مهم‌ترین اثر لاپلاس کتاب پنج‌جلدی مکانیک سماوی<sup>c)</sup> است. لاپلاس، که هم‌عصر لاکرانژ<sup>d)</sup> بود، و راجع به نظریه‌ی امواج با او هم‌کاری داشت؛ به خاطر کارهایش در صوت هم مشهور است. معادله‌ی لاپلاس در شاخه‌های مختلف فیزیک و ریاضی کاربرد فراوان دارد.

<sup>a)</sup>Pierre Simon Laplace (1749-1827), <sup>b)</sup>Ecole Militaire, Paris, <sup>c)</sup>Celestial Mechanics, <sup>d)</sup>Joseph Louis Lagrange (1736-1813)