حالت‌های ِ شبح و اتحاد ِ وارْد در الکترودینامیک ِ کوانتمی

فرهگ لران

دانش‌کده‌ی ِ فیزیک، دانش‌گاه ِ صنعتی ِ اصفهان
اصفهان— کد ِ پستی ِ ۸۳۱۱۱—۸۴۱۵۶، ایران

در این مقاله نشان می‌دهم که حالت‌های ِ شبح در طیف ِ نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ کوانتمی نظیر ِ انتشار ِ فوتون‌هایی با قطبش ِ غیر ِ عرضی است. می‌دانیم که آزادی ِ پیمانه‌ای ِ نظریه به برقراری ِ اتحادی برای ِ دامنه‌ی ِ احتمال ِ انتشار ِ یک فوتون منجر می شود که به اتحاد ِ وارْد شهرت دارد. نشان می‌دهم که چگونه به واسطه‌ی ِ این اتحاد، احتمال ِ تابش ِ فوتونی با قطبش ِ غیر ِ عرضی صفر است.

۱ مقدمه

در یک نظریه ِ کوانتمی، ممکن است که نُرم ِ بعضی از حالت‌ها منفی باشند. این دسته از حالت‌ها را شبح می‌نامند. این حالت‌ها در نظریه‌های ِ میدان با تقارن ِ لورنتس متداول هستند که یک نمونه‌اش نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ کوانتمی است. به چنین حالت‌هایی نمی‌شود مفهوم ِ دامنه‌ی ِ احتمال نسبت داد. از این‌رو یک نظریه‌ی ِ سازگار ِ فیزیکی نظریه‌ای است که در طیف ِ آن، برانگیخته‌گی‌هایی که نظیرشبح‌ها[1] هستند وجود نداشته باشد.

[1]در نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی، بیش‌تر در بحث ِ نظریه‌هایی که تقارن ِ پیمانه‌ای ِ غیر ِ آبلی دارند، موجوداتی به نام ِ میدان‌های ِ شبح هم وجود دارند که البته موضوع ِ این مقاله نیستند. اشتراک ِ حالت ِ شبح و میدان ِ شبح تنها در این است که هر دو مشاهده‌ناپذیرند. امیدوارم که خواننده این دو موضوع ِ متفاوت را با هم یکی نگیرد.

یک مثال از چنین نظریه‌هایی، الکترودینامیک ِ کوانتمی است که بسته به روشی که برای ِ کوانتش ِ آن به کار می‌بریم ممکن است با اشباح روبه‌رو شویم. یکی از این روش‌ها، روش ِ کوانتش ِ هم‌وردا است که من در این مقاله بررسی می‌کنم. در این روش، نظریه‌ی ِ الکترومغناطیس ِ ماکسول را در پیمانه‌ی ِ لورنتس، به روش ِ کوانتش ِ دوم کوانتیده می‌کنیم. کوانتش ِ دوم ِ نظریه‌ی ِ میدان ِ اسکالر و نظریه‌ی ِ میدان ِ ماکسول در مرجع ِ [۱] به تفصیل بررسی شده است. در این مقاله هرچند از نتایج ِ به دست آمده در [۱] استفاده خواهم کرد ولی جزئیات ِ بیش‌تری را به تناسب ِ بحث و در رابطه با کوانتش ِ هم‌وردای ِ نظریه‌ی ِ ماکسول ارائه می‌کنم.

همان‌طور که خواهیم دید در کوانتش ِ هم‌وردای ِ نظریه‌ی ِ ماکسول اشباحی ظاهر خواهند شد که نظیر ِ فوتون‌هایی با قطبش ِ غیر ِ عرضی هستند. اما قانون ِ بقای ِ بار ِ الکتریکی به عنوان ِ یک اتحاد ِ عمل‌گری منجر به برقراری ِ اتحادی برای ِ دامنه‌ی ِ احتمال ِ انتشار ِ فوتون‌ها می شود که به اتحاد ِ وارْد شهرت دارد. این اتحاد به روشنی نشان می‌دهد که احتمال ِ تابش ِ فوتونی با قطبش ِ غیر ِ عرضی صفر است. این نتیجه از دو جهت مطلوب است. اول این که در طیف ِ مشاهده‌پذیر ِ نظریه که هم‌ارز ِ به اصطلاح حالت‌های ِ فیزیکی است شبحی باقی نمی‌ماند. دوم آن که کوانتش، عرضی بودن ِ قطبش ِ نور را که یک دستاورد ِ ضروری ِ نظریه‌ی ِ کلاسیک ِ ماکسول از نظر تطبیق با آزمایش‌گاه است حفظ می‌کند.

ترتیب ِ ارائه‌ی ِ مطالب ِ این مقاله به این صورت است؛ در بخش ِ ۲ نظریه‌ی ِ کلاسیک ِ ماکسول و مفهوم ِ قطبش ِ عرضی را مرور می‌کنم. در بخش ِ ۳ کوانتش ِ هم‌وردای ِ نظریه را مطالعه کرده و بحث ِ اصلی ِ این مقاله را ارائه می‌کنم.

۲ نظریه‌ی ماکسول کلاسیک

نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ کوانتمی برهم‌کنش ِ الکترون‌ها با میدان ِ الکترومغناطیسی را مطالعه می‌کند. در حد ِ کلاسیک این نظریه همان الکترومغناطیس ِ ماکسول است که دینامیک ِ میدان‌های ِ الکتریکی و مغناطیسی را در حضور ِ بارها و جریان‌های ِ الکتریکی به دست می‌دهد. به قوانین ِ ماکسول البته باید قانون ِ نیروی ِ لورنتس را هم اضافه کرد که

دینامیکِ بارهایِ الکتریکی را در حضورِ میدان‌هایِ الکترومغناطیسی به دست می‌دهد.

به چهار تساویِ زیر قوانینِ ماکسول می‌گویند،

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$
$$\nabla.\vec{B} = 0, \tag{2}$$
$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0, \tag{3}$$
$$\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \mu_0\vec{j}, \tag{4}$$

که در آن $\vec{E}$ و $\vec{B}$ میدان‌هایِ الکتریکی و مغناطیسی، و ρ و $\vec{j}$ چگالیِ بار و چگالیِ جریانِ الکتریکی هستند. ϵ_0 و μ_0 ثابتِ گذردهی و ثابتِ تراوایی نام دارند و $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ همسرعتِ نور است. قانونِ نیرویِ لورنتس که نیرویِ واردِ بر یک بارِ الکتریکی را معلوم می‌کند با تساویِ زیر داده می‌شود،

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}, \tag{5}$$

که در آن q بار الکتریکیِ ذره و $\vec{v}$ سرعتِ لحظه‌ایِ آن است.

با استفاده از اتحادهایِ برداریِ $\nabla.\nabla\times\vec{A} = 0$ و $\nabla\times\nabla\phi$ که برایِ هر میدانِ برداریِ مشتق‌پذیر $\vec{A}$ و هر میدانِ اسکالرِ ϕ درست است[2] می‌شود معادلاتِ (2) و (3) را حل کرد. از معادله‌یِ (2) معلوم می‌شود $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ که در آن $\vec{A}$ یک میدانِ دل‌خواه است که چگونه‌گی‌اش را دیگر معادلاتِ ماکسول تعیین می‌کنند. هم‌چنین از معادله‌یِ (3) معلوم می‌شود که $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$.

به این ترتیب می‌بینیم که قوانینِ ماکسول را می‌شود به جایِ بردارهایِ میدانِ الکتریکی و میدانِ مغناطیسی بر حسبِ ϕ و $\vec{A}$ نوشت که به آن‌ها پتانسیلِ اسکالر و پتانسیلِ برداری نام داده‌اند.

[2] درستیِ این اتحادها را می‌شود به سادگی تحقیق کرد. می‌دانیم که عمل‌گرِ ∇ را می‌شود به چشمِ یک بردار دید که مؤلفه‌هایش عمل‌گرهایِ مشتق‌گیریِ پاره‌ای باشد، یعنی $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. از این‌رو می‌شود عملِ $\nabla\times$ و عملِ $\nabla.$ را به چشمِ ضربِ خارجی و ضربِ داخلیِ ∇ در میدانی که برآن عمل می‌شود دید. به این ترتیب مثلاً می‌بینیم که $\nabla.\nabla\times\vec{A} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}A_k = 0$. در نوشتنِ این تساوی از تعریفِ ضربِ داخلی، $\vec{A}.\vec{B} = A_iB_i$ و تعریفِ ضربِ خارجی $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$ استفاده کرده‌ام که در آن ϵ_{ijk} تانسورِ لِوی—چِویتا نام دارد. این تانسور نسبت به جابه‌جا کردنِ هر دو اندیسش پادمتقارن است و $\epsilon_{123} = 1$. اتحادِ دیگر را هم به همین صورت می‌شود ثابت کرد، $(\nabla\times\nabla\phi)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}\phi = 0$.

۱.۲ آزادی پیمانه‌ای

دیدیم که دو مجهول از شش مجهولِ $E_i,\ B_i,$ $(i = 1,2,3)$ با معادلاتِ (2) و (3) حل می‌شود و چهار مجهولِ دیگر برحسبِ میدان‌هایِ نامعلومِ ϕ و سه مؤلفه‌یِ میدانِ $\vec{A}$ تعیین می‌شود. ظاهراً معادلاتِ (1) و (4) چهار معادله‌یِ لازم برایِ حلِ ϕ و $\vec{A}$ را به دست می‌دهد اما این‌طور نیست. در واقع با استفاده از اتحادِ برداریِ $\nabla.\nabla\times B$ و معادلاتِ (1) و (4) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla.\vec{j} = 0, \tag{6}$$

که معنایی به جز قانونِ بقایِ بارِ الکتریکی ندارد.[3] این نتیجه‌یِ زیبایی است که قانونِ بقایِ بارِ الکتریکی در معادلاتِ ماکسول نهفته است اما از آن جا که این معادله هیچ شرطی رویِ میدان‌هایِ الکتریکی و مغناطیسی نمی‌گذارد ما یک معادله برایِ حلِ ϕ و $\vec{A}$ کم می‌آوریم. معنیِ اینِ حرف این است که یک درجه‌یِ آزادی از میانِ چهار درجه‌یِ آزادیِ نظیرِ ϕ و سه مؤلفه‌یِ $\vec{A}$ با معادلاتِ ماکسول تعیین نمی‌شود! آیا معنیِ این حرف این است که قوانینِ ماکسول ناکافی هستند و ما به یک معادله‌یِ دیگر هم احتیاج داریم؟ برایِ پاسخ دادن به این پرسش باید ببینیم که آیا آن درجه‌یِ آزادی‌ای که باقی‌می‌ماند در آزمایش‌گاه قابلِ مشاهده هست یا نه. اگر مشاهده‌پذیر باشد، آن‌گاه قوانینِ ماکسول برایِ تبیینِ مشاهده‌پذیرها ناکافی است و ما به یک معادله‌یِ اضافی احتیاج داریم. ولی اگر این درجه‌یِ آزادی مشاهده‌پذیر نباشد آن‌گاه قوانینِ ماکسول کافی هستند چرا که آزمایش‌گاه را تبیین می‌کنند هرچند مشاهده‌ناپذیرهایی باقی بمانند که این قوانین تعیینِ شان نکنند.

برایِ بررسیِ این موضوع توجه می‌کنیم که مشاهده‌پذیرهایِ نظریه‌یِ ماکسول میدان‌هایِ الکتریکی و مغناطیسی هستند که نوعاً به کمکِ قانونِ نیرویِ لورنتس سنجیده می‌شوند. در واقع هیچ راهی برایِ آن‌که ϕ و $\vec{A}$ را مستقیماً بسنجیم وجود ندارد. از سویِ دیگر از تعریفِ ϕ و $\vec{A}$ معلوم می‌شود که میدان‌هایِ ϕ و $\vec{A}$ و میدان‌هایِ ϕ' و $\vec{A}'$ که با رابطه‌یِ زیر تعریف شوند،

[3] خوب است که این نکته را به روشنی نشان دهم. بارِ الکتریکی با رابطه‌یِ $Q = \int d^3x\rho$ داده می‌شود. پس اگر معادله‌یِ (6) برقرار باشد آن‌گاه $\frac{d}{dt}Q = -\int\nabla.\vec{j} = 0$ که این تساوی با استفاده از قانونِ گوس و فرضِ $\vec{j}(\infty) = 0$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi + \frac{\partial}{\partial t}\varphi,\\ \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\varphi, \qquad (7)\end{aligned}$$

که در آن φ هر تابع ِ دل‌خواه ِ مشتق‌پذیری باشد، یک میدان ِ الکتریکی و مغناطیسی را توصیف می‌کنند،

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\left(\vec{A}+\nabla\varphi\right) = \vec{B},\\ \vec{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\nabla\left(\phi + \frac{\partial}{\partial t}\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}+\nabla\varphi\right) = \vec{E}. \qquad (8)\end{aligned}$$

φ همان یک درجه‌ی ِ آزادی‌ای است که معادلات ِ ماکسول تعیینش نمی‌کنند اما همان‌طور که می‌بینید این درجه‌ی ِ آزادی مشاهده‌پذیر نیست. به چنین درجه‌ی ِ آزادی‌ای، آزادی ِ پیمانه‌ای می‌گویند و تبدیل ِ (7) را که ϕ' و $\vec{A}'$ را بر حسب ِ ϕ و $\vec{A}$ می‌دهد تبدیل ِ پیمانه‌ای می‌نامند.

۲.۲ امواج الکترومغناطیسی

برای ِ ادامه‌ی ِ بحث به‌تر است که معادلات ِ (1) و (4) را برحسب ِ ϕ و $\vec{A}$ بنویسیم،

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad (9)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} + \nabla\left(\nabla.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = \mu_0\vec{j}, \qquad (10)$$

که در آن $\nabla^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$. هم‌چنین خوب است که بدانیم که ϕ و $\vec{A}$ مؤلفه‌های ِ یک چهاربردار هم‌وردای ِ $A^\mu \equiv (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$ را می‌سازند[4] به این ترتیب می‌شود معادلات ِ (9) و (10) را یک‌جا نوشت،

[4] همان‌طور که می‌دانید اصطلاح ِ چهاربردار بعد از نسبیت ِ خاص معمول شد. از معادله‌ی ِ (11) معلوم است که با فرض ِ چهاربردار بودن ِ A_μ، قوانین ِ ماکسول شکل ِ هم‌وردای ِ لورنتسی دارند. نتیجه‌ی ِ این ره‌یافت آن است که c که سرعت ِ انتشار ِ امواج ِ الکترومغناطیسی در خلأ را می‌دهد، موضوعی که در معادله‌ی ِ (13) به روشنی دیده می‌شود، باید تحت ِ تبدیلات ِ لورنتس ناوردا باشد. یعنی همه‌ی ِ ناظرهای ِ لخت باید سرعت ِ نور را یک عدد به دست بیاورند. چون این نتیجه همان اصل ِ دوم ِ نسبیت ِ خاص است معلوم می‌شود که فرض ِ چهاربردار بودن ِ A_μ فرض ِ درستی است.

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial.A = \mu_0 j_\mu. \tag{11}$$

در این رابطه $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$ و $\partial.A = \partial_\mu A^\mu$ که‌در آن $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ و اندیس‌های ِ فضازمانی با متریک ِ مینکوفسکی بالا—پایین می‌شود. متریک ِ مینکوفسکی را یک ماتریس ِ قطری گرفته‌ام که اعضای ِ روی ِ قطر ِ آن $\eta = (+1, -1, -1, -1)$ باشد. هم‌چنین تعریف می‌کنم $x^0 \equiv ct$ و $j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$.

چون من در این مقاله بیش‌تر به قسمت ِ ماکسولی ِ نظریه‌ی ِ الکترودینامیک علاقه‌مند هستم از این پس وجود ِ بارهای ِ الکتریکی را نادیده می‌گیرم یعنی فرض می‌کنم که $j^\mu = 0$. هم‌چنین خوب است که از آزادی ِ پیمانه‌ای ِ $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\varphi$ استفاده کنیم و فرض کنیم که میدان ِ A_μ طوری انتخاب شده است که در تساوی ِ زیر که به پیمانه‌ی ِ لورنتس شهرت دارد، صدق می‌کند،

$$\partial.A = \nabla.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0. \tag{12}$$

به این انتخاب ِ ویژه در بین ِ A_μهای ِ مختلفی که با انتخاب‌های ِ گوناگونی از پیمانه‌ی ِ φ می‌شود به دست آورد، میدان ِ A_μ در پیمانه‌ی ِ لورنتس می‌گویند. در این پیمانه شکل ِ قوانین ِ ماکسول در خلأ خیلی ساده می‌شود،

$$\Box A_\mu = 0. \tag{13}$$

این یک معادله‌ی ِ موج است که امواجی با سرعت ِ انتشار ِ c را پیش‌بینی می‌کند. حل ِ موج ِ تخت ِ این معادله به این صورت است،

$$A_\mu = \epsilon_\mu(k) e^{\pm ik.x}, \tag{14}$$

که در آن $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ چهاربردار ِ تکانه نام دارد که در آن ω بسامد و $\vec{k}$ بردار ِ موج نام دارد. به $\epsilon_\mu(k)$ چهاربردار ِ قطبش می‌گویند. معادله‌ی ِ (14) نشان می‌دهد که $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = 0$.

پیمانه‌ی ِ لورنتس را می‌شود به صورت ِ قیدی بر قطبش ِ ϵ_μ در نظر گرفت،

$$k.\epsilon(k) = 0. \tag{15}$$

اما این معادله شکل ِ چهاربردار ِ قطبش را دقیقاً تعیین نمی‌کند. درواقع پیمانه‌ی ِ لورنتس آزادی ِ پیمانه‌ای را کاملاً برنمی‌دارد؛ دسته‌ی ِ بزرگی از پیمانه‌های ِ φ وجود دارد که با

پیمانه‌ی ِ لورنتس سازگارند. پیمانه‌ی ِ لورنتس می‌گوید که $\partial.A = 0$. پس اگر من به A_μ هر حلی از معادله‌ی ِ موج ِ $\Box\varphi = 0$ را اضافه کنم نتیجه هم‌چنان در پیمانه‌ی ِ لورنتس صدق می‌کند.[5] حل ِ موج ِ تخت ِ φ را می‌شود به صورت ِ $\varphi = ae^{ik.x}$ نوشت که در آن $k^2 = 0$. با توجه به معادله‌ی ِ (14) آزادی ِ پیمانه‌ای باقی مانده به صورت ِ زیر در می‌آید،

$$\epsilon(k) \to \epsilon'(k) = \epsilon(k) + ak. \tag{16}$$

از این آزادی ِ پیمانه‌ای می‌شود استفاده کرد و با انتخاب ِ مناسب ِ a کاری کرد که مثلاً مؤلفه‌ی ِ صفرم ِ چهاربردار ِ قطبش مساوی ِ صفر باشد. آن‌گاه معادله‌ی ِ (15) می‌گوید که

$$\vec{k}.\vec{\epsilon} = 0. \tag{17}$$

معنی ِ این حرف این است که می‌شود بردار ِ قطبش ِ موج ِ الکترومغناطیسی را طوری انتخاب کرد که بر بردار ِ موج ِ آن که جهت ِ انتشارش را نشان می‌دهد عمود باشد. به عبارت ِ دیگر قطبش ِ امواج ِ الکترومغناطیسی عرضی است و قطبش‌های ِ غیر ِ عرضی مشاهده‌پذیر نیستند چه‌را که نظیر ِ آزادی ِ پیمانه‌ای ِ مسأله هستند. این نتیجه‌ی ِ مهمی است که به تأیید ِ تجربی هم رسیده است، یعنی معلوم شده که نور موج ِ عرضی است. اما همان‌طور که دیدید این یک نتیجه‌ی ِ کلاسیک است. هدف ِ این مقاله این است که نشان بدهم این نتیجه پس از کوانتش ِ نظریه‌ی ِ ماکسول هم‌چنان برقرار است.

۳ نظریه‌ی ماکسول کوانتمی

برای ِ کوانتیده کردن ِ نظریه‌ی ِ ماکسول از الگوی ِ شرودینگر پیروی می‌کنم. یعنی یک همیلتونی می‌سازم که معادله‌ی ِ حرکت ِ ماکسول (13) را بدهد و بعد معادله‌ی ِ شرودینگر $H\left|\psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle$ را حل می‌کنم. سپس با توجه به آن که معادله‌ی ِ (13) در پیمانه‌ی ِ لورنتس به دست آمده بود این پیمانه را به صورت ِ یک اتحاد ِ عمل‌گری اعمال می‌کنم،

[5] اگر $A_\varphi \equiv A_\mu + \partial_\mu\varphi$ که در آن φ حل ِ معادله‌ی ِ موج است آن‌گاه

$$\partial.A_\varphi = \partial.A + \Box\varphi = \partial.A$$

$$\partial.\hat{A} = 0. \tag{18}$$

که در آن $\hat{A}_\mu$ عمل‌گر ِ نظیر ِ میدان ِ کلاسیک ِ A_μ است. بیایید اول عمل‌گر ِ $\hat{A}_\mu$ را به روش ِ کوانتش ِ دوم بسازیم.

۱.۳ کوانتش دوم

همان‌طور که در مقاله‌ی ِ [۱] توضیح داده‌ام اگر معادله‌ی ِ حرکت ِ (13) را برای ِ مؤلفه‌های ِ فوریه‌ی ِ $A_\mu(x)$ که با رابطه‌ی ِ

$$A_\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \epsilon_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k}.\vec{x}}, \tag{19}$$

تعریف می‌شوند بنویسیم[6] می‌شود دید که این معادله به صورت ِ زیر در می آید،

$$\left(\partial_t^2 + \omega^2(\vec{k})\right)\epsilon_\mu(\vec{k}) = 0, \qquad \omega(\vec{k}) = \left|\vec{k}\right| \tag{20}$$

در این جا $\epsilon_\mu(\vec{k})$ مؤلفه‌ی ِ فوریه‌ی ِ $A_\mu(\vec{x})$ است که از رابطه‌ی ِ زیر به دست می آید،

$$\epsilon_\mu(\vec{k}) = \int d^3x A_\mu(\vec{x}) e^{-i\vec{k}.\vec{x}}. \tag{21}$$

میدان ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ یک میدان ِ مختلط است و به کمک ِ رابطه‌ی ِ (21) می‌شود دید که

$$\epsilon_\mu^*(\vec{k}) = \epsilon_\mu(-\vec{k}). \tag{22}$$

می‌توانیم $\epsilon_\mu(\vec{k},t)$ را بر حسب ِ مؤلفه‌های ِ حقیقی و موهومی‌اش به صورت ِ

$$\epsilon_\mu(\vec{k}) = \epsilon_\mu^r(\vec{k}) + i\epsilon_\mu^i(\vec{k}) \tag{23}$$

بازنویسی کنیم و بدیهی است که هر دو مؤلفه در معادله‌ی ِ حرکت ِ (20) صدق می‌کنند. از طرفی معادله‌ی ِ (20) برای ِ هر مؤلفه‌ی ِ حقیقی یا موهومی ِ میدان ِ ϵ با برچسب ِ μ و k، درست معادله‌ی ِ حرکت ِ یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ ساده با بسامد ِ $\omega(\vec{k})$ است. برای ِ

[6] در [۱] به جای ِ $\epsilon^\mu(\vec{k})$ از نماد ِ $\tilde{A}^\mu(\vec{k})$ برای ِ نشان دادن ِ مؤلفه‌های ِ فوریه‌ی ِ میدان ِ $A^\mu(x)$ استفاده شده است.

دیدن ِ این موضوع فرض کنید که برای ِ یک μ و k ی ِ داده شده $x=\epsilon^r_\mu(\vec{k})$. به این ترتیب معادله‌ی ِ (20) به صورت ِ زیر در می آید:

$$\ddot{x}+\omega^2(\vec{k})x=0. \tag{24}$$

پس همیلتونی ِ نظیر ِ این دست‌گاه، همیلتونی ِ یک نوسان‌گر ِ هماهنگ ِ ساده با بسامد ِ $\omega(\vec{k})$ است:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\omega^2(\vec{k})x^2 \\ &= \frac{1}{2}\omega(\vec{k})\left(a^\dagger a+aa^\dagger\right). \end{aligned} \tag{25}$$

در تساوی ِ دوم همیلتونی را برحسب ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنا نوشته‌ام که تعریف ِ شان برحسب ِ عمل‌گرهای ِ مکان x و تکانه‌ی ِ $p=\dot{x}$ به صورت ِ زیر است:

$$a=\sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2}}\left(x+\frac{ip}{\omega(\vec{k})}\right), \qquad a^\dagger=\sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2}}\left(x-\frac{ip}{\omega(\vec{k})}\right). \tag{26}$$

به همین ترتیب می‌توانیم عمل‌گر ِ فنای ِ $a^r_\mu(\vec{k})$ و عمل‌گر ِ خلق ِ $a^r_\mu{}^\dagger(\vec{k})$ نظیر ِ مؤلفه‌ی ِ μاُم ِ قسمت ِ حقیقی ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ را تعریف کنیم،

$$\epsilon^r_\mu(\vec{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a^r_\mu(\vec{k})+a^r_\mu{}^\dagger(\vec{k})\right), \tag{27}$$

و مشابه ِ آن را هم برای ِ قسمت ِ موهومی ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ در نظر بگیریم.

از رابطه‌ی ِ (22) می‌دانیم که،

$$a^r_\mu(\vec{k})=a^r_\mu(-\vec{k}), \qquad a^i_\mu(\vec{k})=-a^i_\mu(-\vec{k}). \tag{28}$$

پس به کمک ِ رابطه‌ی ِ (23) می‌شود $\epsilon_\mu(\vec{k},t)$ را بر حسب ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنا نوشت،

$$\epsilon_\mu(\vec{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a_\mu(\vec{k})+a_\mu{}^\dagger(-\vec{k})\right), \tag{29}$$

که در آن،

$$a_\mu(\vec{k})\equiv a^\mu_r(\vec{k})+ia^\mu_i(\vec{k}), \tag{30}$$

و بعد دید که:

$$\begin{aligned}\hat{A}_\mu(\vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\epsilon_\mu(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a_\mu(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}} + {a_\mu}^\dagger(\vec{k})e^{-i\vec{k}.\vec{x}}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

پرسش ِ مهمی که باید به آن پاسخ بدهیم آن است که رابطه‌ی ِ جابه‌جایی ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنای ِ نظیر ِ قسمت‌های ِ حقیقی و موهومی ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ را چه‌گونه باید پیدا کرد. همان‌طور که می‌دانید در مکانیک ِ کوانتمی و در مسأله‌ی ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ ساده جبر ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنا که در معادله‌ی ِ (26) تعریف شده‌اند را می‌شود از روی ِ جبر ِ عمل‌گرهای ِ مکان و تکانه،

$$[x, p] = i\hbar, \tag{32}$$

به صورت ِ زیر به دست آورد،

$$[a, a] = 0, \qquad [a, a^\dagger] = 1, \qquad [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{33}$$

ممکن است سعی کنیم که ابتدا جبری نظیر ِ (32) برای ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ و تکانه‌ی ِ نظیرش بنویسیم و بعد به کمک ِ آن به پرسش ِ مان پاسخ دهیم. اما تعمیم ِ جبر ِ (32) به مسأله‌ی ِ الکترومغناطیس چندان سرراست نیست و ظرافت‌هایی دارد که در پیوست ِ ۱ ِ مرجع ِ [۱] توضیح داده‌ام. از این‌رو به جای ِ آن‌که جبر ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنای ِ نظیر ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ را از جبر ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ و تکانه‌ی ِ نظیرش بخوانم سعی می‌کنم که تعمیم ِ درستی از جبر ِ (33) را حدس بزنم. به این منظور ابتدا توجه می‌کنم که درجات ِ آزادی ِ نظیر ِ قسمت ِ حقیقی و موهومی ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ از یک‌دیگر مستقل‌اند. پس طبیعی است که فرض کنم عمل‌گرهای خلق و فنای نظیر ِ قسمت ِ حقیقی با عمل‌گرهای خلق و فنای ِ نظیر ِ قسمت ِ موهومی جابه‌جا شوند. هم‌چنین در مورد ِ قسمت ِ حقیقی یا موهومی خوب است که فرض کنم عمل‌گرهای ِ خلق دو به دو و عمل‌گرهای ِ فنا دوبه‌دو با هم جابه‌جا می‌شوند. می‌ماند رابطه‌ی ِ جابه‌جایی ِ یک عمل‌گر ِ فنا با یک عمل‌گر ِ خلق که فعلاً آن را با الهام ِ از (33) به صورت ِ زیر ارائه می‌کنم،

$$\left[a^r_\mu(\vec{k}), a^{r\dagger}_\nu(\vec{k}')\right] = (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\mu\nu}, \tag{34}$$

که در آن

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{35}$$

مشابه ِ این جبر را هم برای ِ عمل‌گرهای خلق و فنای ِ نظیر ِ قسمت ِ موهومی ِ $\epsilon_\mu(\vec{k})$ در نظر می‌گیرم.[7] نتیجه‌ی ِ این حرف‌ها این است که برای ِ عمل‌گر ِ فنای ِ $a_\mu(\vec{k})$ که در معادله‌ی ِ (30) تعریف کردم و عمل‌گر ِ خلق ِ نظیرش روابط ِ جابه‌جایی ِ زیر را در نظر می‌گیرم،

$$\left[a_\mu(\vec{k}), a_\nu(\vec{k}')\right] = 0, \tag{36}$$

$$\left[a_\mu(\vec{k}), a^\dagger_\mu(\vec{k}')\right] = (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\mu\nu}, \tag{37}$$

$$\left[a^\dagger_\mu(\vec{k}), a^\dagger_\nu(\vec{k}')\right] = 0. \tag{38}$$

با الهام ِ از معادله‌ی ِ (25) و با توجه به آن که $\epsilon_\mu(\vec{k})$ به ازاء ِ هر اندیس ِ μ و تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ یک درجه‌ی ِ آزادی ِ مستقل است همیلتونی را به صورت ِ زیر معرفی می‌کنم،

$$H = \sum_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega(\vec{k})}{2}\left[a^\dagger_\mu(\vec{k})a_\mu(\vec{k}) + a_\mu(\vec{k})a^\dagger_\mu(\vec{k})\right]. \tag{39}$$

تمرین ِ خوبی است که با این همیلتونی و به کمک ِ معادله‌ی ِ شرودینگر و جبر ِ (36)—(38) نشان دهید که چشم‌داشتی ِ عمل‌گر ِ $\hat{A}_\mu(\vec{x})$ در معادله‌ی ِ موج ِ کلاسیک $\Box\left\langle \hat{A}_\mu \right\rangle = 0$ صدق می‌کند.

قدم ِ بعدی آن است که عمل‌گر ِ $\hat{A}_\mu(x)$ یعنی عمل‌گر ِ $\hat{A}_\mu(\vec{x})$ در تصویر ِ هیزنبرگ را بنویسیم،

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &\equiv e^{iHt}\hat{A}(\vec{x})e^{-iHt} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a_\mu(\vec{k})e^{-ik.x} + a_\mu{}^\dagger(\vec{k})e^{ik.x}\right) \end{aligned} \tag{40}$$

[7] جلوتر خواهیم دید که این جبر با هم‌وردایی لورنتسی ِ نظریه‌ی ِ ماکسول نمی‌خواند و باید آن را اندکی اصلاح کنیم.

که در آن $k^0=\omega(\vec{k})$. روشن است که $\Box \hat{A}_\mu = 0$.

در این جا لازم است که توضیح بدهم معمول ِ کتاب‌های ِ نظریه‌ی ِ میدان آن است که به جای ِ مثلاً عمل‌گر ِ a_μ از عمل‌گر ِ $a_s \equiv \epsilon_s{}^\mu a_\mu$ استفاده کنند که در آن ϵ_s $(s=0,1,2,3,)$ چهاربردار ِ قطبش نام دارد و a_s عمل‌گر ِ فنای ِ فوتونی به قطبش ِ s است. این روشی است که من هم در [۱] از آن استفاده کردم ولی در این مقاله ترجیح دادم که نظریه را برحسب ِ a_μ و عمل‌گر ِ خلق ِ نظیرش بنویسم و مفهوم ِ قطبش را در اشاره به مقادیر ِ مختلف ِ μ به کار ببرم. این روش هرچند نامعمول است اما کمکم می‌کند که اندکی از حجم ِ مطلب بکاهم.

۲.۳ هم‌وردایی تحت تبدیلات لورنتس

هم‌وردایی ِ لورنتسی ِ نظریه‌ی ِ کلاسیک ِ ماکسول دست‌آورد ِ مهمی است که انتظار داریم در نظریه‌ی ِ کوانتمی هم برقرار باشد چه‌را که انتظار داریم نظریه‌ی ِ ماکسول نظریه‌ی ِ درست ِ پدیده‌ی ِ الکترومغناطیس باشد که هم‌وردایی ِ لورنتسی ِ آن از آزمایش نتیجه شده است.

در یک نظریه‌ی ِ کوانتمی تعیین ِ تقارن‌های ِ حالت ِ خلاء اهمیت ِ ویژه‌ای دارد. حالت ِ خلاء بر طبق ِ تعریف آن ویژه حالت ِ دست‌گاه است که کم‌ترین مقدار ِ انرژی را داشته باشد. با توجه به جبر ِ $(36)-(38)$ می‌توانیم همیلتونی ِ (39) را به صورت ِ زیر بنویسیم،

$$H=\sum_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega(\vec{k})\left[a_\mu^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k})+\frac{1}{2}\right]. \tag{41}$$

از این جا روشن است که ویژه‌حالت ِ $|0\rangle$ که با رابطه‌ی ِ

$$a_\mu(\vec{k})\,|0\rangle=0, \tag{42}$$

تعریف می‌کنیم نظیر ِ کمترین ویژه‌مقدار ِ انرژی است،

$$H\,|0\rangle=\mathcal{E}_0\,|0\rangle\,,\qquad \mathcal{E}_0=\left[\sum_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega(\vec{k})}{2}\right]. \tag{43}$$

$\mathcal{E}_0$ را انرژی ِ خلاء می‌نامند که البته اندازه‌ی ِ آن متناهی نیست.[8] از این‌رو رسم بر آن است که از ابتدا این مقدار ِ ثابت اما نامتناهی را از همیلتونی کسر کنیم. می‌دانیم که این کار

[8] البته این مقدار ِ نامتناهی به روی‌داد ِ مشاهده‌پذیری منجر می‌شود که به پدیده‌ی ِ کازیمیر شهرت دارد.

دینامیک ِ دست‌گاه را تغییری نمی‌دهد. پس به جای ِ (41) همیلتونی را به صورت ِ زیر در نظر می‌گیریم،

$$H = \sum_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega(\vec{k}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) a_\mu(\vec{k}). \tag{44}$$

فرض بر این است که ویژه‌حالت ِ خلاء تحت ِ تبدیل ِ لورنتس ناوردا است،

$$U(\Lambda)\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle, \tag{45}$$

که در آن $U(\Lambda)$ عمل‌گر ِ نظیر ِ تبدیل ِ لورنتس ِ مختصات ِ $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ است. این عمل‌گر بر عمل‌گر ِ هیزنبرگی ِ $\hat{A}_\mu(x)$ به صورت ِ زیر عمل می‌کند،

$$U(\Lambda)\hat{A}_\mu(x)U(\Lambda)^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu \hat{A}_\nu(\Lambda^{-1}.x), \tag{46}$$

که در آن Λ^{-1} وارون ِ تبدیل ِ Λ را می‌دهد. با استفاده از (46) و (40) می‌شود دید که

$$U(\Lambda)a_\mu(\vec{k})U(\Lambda)^{-1} = \sqrt{\frac{\omega(\vec{k}_\Lambda)}{\omega(\vec{k})}} \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu(\vec{k}_\Lambda), \tag{47}$$

که در آن $\vec{k}_\Lambda$ قسمت ِ برداری ِ چهاربردار ِ $k_\Lambda \equiv \Lambda.k$ را نشان می‌دهد.[9] مشابه ِ این رابطه برای ِ عمل‌گر ِ خلق هم به دست می‌آید. از معادله‌ی ِ (47) معلوم می‌شود که اگر ویژه‌حالت ِ فوتونی با بردار ِ موج ِ $\vec{k}$ و قطبش ِ μ را با

$$\left|\vec{k}, \mu\right\rangle \equiv \sqrt{2\omega(\vec{k})} a_\mu^\dagger(\vec{k}) \left|0\right\rangle, \tag{48}$$

تعریف کنیم آن گاه

$$U(\Lambda)\left|\vec{k}, \mu\right\rangle = \Lambda_\mu{}^\nu \left|\vec{k}_\Lambda, \nu\right\rangle, \tag{49}$$

بحث در این مورد در حوصله‌ی ِ این مقاله نیست اما بد نیست که بدانید آرتور سی. کلارک علمی—تخیلی نویس ِ مشهور در مجموعه‌ی ِ داستان‌های ِ ادیسه‌ی ِ فضایی‌اش پیش‌بینی کرده که در هزاره‌ی ِ سوم ِ میلادی بشر از انرژی ِ خلاء به عنوان ِ نیروی ِ پیشران در فضاپیماها استفاده خواهد کرد. خوب است که بررسی کنید که آیا چنین فن‌آوری‌ای با قوانین ِ ترمودینامیک سازگاری دارد یا نه.

[9] برای ِ به دست آوردن ِ این نتایج کافی است که توجه کنید که المان ِ $d^3k/\omega(\vec{k})$ تحت ِ تبدیلات ِ لورنتس ناوردا است، یعنی

$$\frac{d^3k}{\omega(\vec{k})} = \frac{d^3k_\Lambda}{\omega(\vec{k}_\Lambda)}.$$

که مطابق ِ انتظار ِ ما است. حالا به نقطه‌ای رسیده‌ایم که می‌توانیم درستی ِ فرض ِ (34) و به تبع ِ آن جبر ِ (37) را بسنجیم. برای ِ این کار کمیت ِ $\left\langle \vec{k},\mu|\vec{k}',\nu\right\rangle$ را حساب می‌کنیم. با توجه به تعریف ِ (48) و جبر ِ (36)—(38) معلوم می‌شود که

$$\left\langle \vec{k},\mu\middle|\vec{k}',\nu\right\rangle = 2\omega(\vec{k})(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\mu\nu}. \tag{50}$$

این نتیجه یک قسمت ِ خوب دارد و یک قسمت ِ بد. قسمت ِ خوبش آن است که عبارت ِ $\omega(\vec{k})\delta(\vec{k}-\vec{k}')$ در سمت ِ راست ِ تساوی ِ بالا تحت ِ تبدیلات ِ لورنتس ناوردا است. قسمت ِ بدش آن است که $\delta_{\mu\nu}$ تحت ِ تبدیلات ِ لورنتس ناوردا نیست و این با تبدیل ِ (49) نمی‌خواند. برای ِ رفع ِ این مشکل باید جبر ِ (37) را به این صورت اصلاح کنیم،

$$\left[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')\right] = -(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')\eta_{\mu\nu}. \tag{51}$$

به این ترتیب به جای ِ (50) خواهیم داشت،

$$\left\langle \vec{k},\mu\middle|\vec{k}',\nu\right\rangle = -2\omega(\vec{k})(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')\eta_{\mu\nu}. \tag{52}$$

که با (49) سازگار است چه‌را که $\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha\Lambda_\nu{}^\beta\eta_{\alpha\beta}$.

۳.۳ شبح

با توجه به آن که من متریک ِ مینکوفسکی را به صورت ِ $\eta = (+,-,-,-)$ اختیار کرده بودم می‌بینیم که برای ِ قطبش‌های ِ فضایی یعنی برای ِ $\mu = 1,2,3$ این جبر ِ جدید همان جبر ِ (37) است اما برای ِ $\mu = 0$ این جبر یک علامت ِ $(-)$ با قبل تفاوت کرده است. هرچند با این فرض ِ جدید ما مشکل ِ ناوردایی ِ لورنتسی ِ نظریه را حل کرده‌ایم اما با دو مشکل ِ جدید روبه‌رو می‌شویم. اول آن که همان‌طور که از معادله‌ی ِ (52) دیده می‌شود نُرم ِ ویژه‌حالت ِ نظیر ِ فوتونی با قطبش ِ $\mu = 0$ منفی است. به این معنا ویژه‌حالت ِ نظیر ِ قطبش ِ $\mu = 0$ یک حالت ِ شبح است. برای ِ دیدن ِ دومین مشکل، توجه کنید که برای ِ آن که هم‌چنان ویژه‌حالت‌های ِ $\left|\vec{k},\mu\right\rangle$ هم‌انرژی باشند، یعنی داشته باشیم

$$H\left|\vec{k},\mu\right\rangle = \omega(\vec{k})\left|\vec{k},\mu\right\rangle, \tag{53}$$

باید فرض کنیم که[10]

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega(\vec{k}) \left[\sum_{\mu=1}^{3} a_\mu^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k})a_0(\vec{k})\right]. \tag{54}$$

چنین فرضی جبر ِ

$$\begin{aligned}\left[H, a_\mu(\vec{k})\right] &= -\omega(\vec{k})a_\mu(\vec{k}),\\ \left[H, a_\mu^\dagger(\vec{k})\right] &= \omega(\vec{k})a_\mu^\dagger(\vec{k}),\end{aligned} \qquad \mu = 0, \cdots, 3, \tag{55}$$

را برقرار نگاه می‌دارد که نه تنها برای ِ به دست آوردن ِ (53) بل‌که برای ِ ساختن ِ عمل‌گر ِ هیزنبرگی ِ (40) هم ضروری است. اما به این ترتیب همیلتونی یک عمل‌گر ِ مثبت نیست و هرچه برانگیخته‌گی ِ مدهای ِ با قطبش ِ $\mu = 0$ بیش‌تر باشد ویژه‌حالت‌هایی با انرژی ِ کم‌تری به دست می‌آید و به این ترتیب دست‌گاه ِ فیزیکی پایدار نیست.

همان‌طور که خواهیم دید این مشکل در عمل پیش نمی‌آید چرا که در نظریه‌ی ِ ماکسول اشباح مشاهده‌پذیر نیستند. هم‌چنین به یاد بیاورید که همه‌ی ِ این محاسبات در پیمانه‌ی ِ لورنتس انجام شده است ولی ما هنوز آن را اعمال نکرده‌ایم.

۴.۳ اتحاد وارْد

پیش از آن که به مساله‌ی ِ پیمانه‌ی ِ لورنتس بپردازیم به‌تر است به این پرسش پاسخ بدهم که چه‌گونه می‌شود نشان داد که فوتون‌هایی که قطبش ِشان غیر ِ عرضی است در فرآیندهای ِ فیزیکی تولید نمی‌شوند.

برای ِ این منظور و صرفاً برای ِ ساده‌گی ِ محاسبات فرض‌کنید که بخواهیم دامنه‌ی ِ احتمال ِ تولید ِ فوتونی با قطبش ِ μ و تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ را در یک فرآیند ِ فیزیکی به دست آوریم. به این منظور باید دامنه‌ی ِ گذار از حالت ِ اولیه‌ی ِ $|i\rangle$ به حالت ِ پایانی ِ $\left|\vec{k}, \mu; f\right\rangle \equiv \left|\vec{k}, \mu\right\rangle |f\rangle$ را بررسی کنیم که در آن $|i\rangle$ و $|f\rangle$ نظیر ِ آرایش ِ بارهای ِ الکتریکی در آغاز و پایان ِ برهم‌کنش هستند.

جمله‌ی ِ برهم‌کنش در الکترودینامیک با

[10] خوب است که به این نکته هم توجه کنید که با اصلاح ِ همیلتونی به این شکل مقدار ِ انرژی ِ خلاء ِ داده شده در (43) نصف می‌شود چه‌را که حالا سهم ِ قطبش ِ $\mu = 0$ در این انرژی به ازاء ِ هر مد $-1/2\omega(\vec{k})$ است. به این ترتیب نیروی ِ کازیمیری که با این اصلاحیه به دست می‌آید نصف ِ پیش‌بینی ِ قبلی است.

$$S_{int} = q \int d^4xA(x).j(x), \tag{56}$$

داده می‌شود که در آن q بار ِ الکتریکی ِ ذره و j^μ چهاربردار ِ جریان ِ الکتریکی است.[11] دامنه‌ی ِ گذار در تقریب ِ اول با

$$\mathcal{M}^\mu(\vec{k}) \equiv \left\langle \vec{k}, \mu; f \middle| \hat{S}_{int} \middle| i \right\rangle \tag{57}$$

داده می‌شود. از معادله‌های ِ (40) و (51) معلوم می‌شود که

$$\mathcal{M}^\mu(\vec{k}) = \int d^4x e^{ik.x} \left\langle f \middle| \hat{j}^\mu(x) \middle| i \right\rangle, \qquad k^0 = \omega(\vec{k}), \tag{58}$$

که در به دست آوردن ِ آن از این نکته استفاده کرده‌ام که $a_\mu \left|i\right\rangle = 0$.

پیش از آن که قدم ِ بعدی را بردارم باید نکته‌ای را یادآوری کنم. می‌دانیم که بار ِ الکتریکی کمیتی بقادار است و در نظریه‌ی ِ کلاسیک این موضوع را با تساوی ِ $\partial.j = 0$ نشان می‌دهیم. دیدیم که در نظریه‌ی ِ کلاسیک معادلات ِ ماکسول بقای ِ بار ِ الکتریکی را تقاضا می‌کنند. اما بقای ِ بار ِ الکتریکی یک مشاهده‌ی ِ تجربی است و ازاین‌رو باید در نظریه‌ی ِ کوانتمی هم برقرار باشد. یعنی باید بشود نشان داد که $\partial.\hat{j} = 0$. خوش‌بختانه در نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ کوانتمی برقراری ِ این اتحاد ِ عمل‌گری اثبات می‌شود.[12] من در این مقاله این اثبات را نمی‌آورم و تنها آن را به کار می‌گیرم.

اگر فرض‌کنیم که $\partial.\hat{j} = 0$ آن‌گاه از معادله‌ی ِ (58) معلوم می‌شود که

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) = 0, \qquad k^0 = \omega(\vec{k}). \tag{59}$$

به این تساوی اتحاد ِ وارْد می‌گویند چه‌را که شکل ِ ابتدایی ِ آن نخستین بار توسط ِ او در غالب ِ یک نامه‌ی ِ چند سطری به ویراستار ِ مجله‌ی ِ فیزیکال—رویو اثبات شد.[13]

[11] خوب است که نشان دهید از این برهم‌کنش قانون ِ نیروی ِ لورنتس به دست می‌آید.

[12] توجه کنید که به طور ِ کلی قوانین ِ بقای ِ کلاسیک لزوماً پس از کوانتش هم‌چنان برقرار نیستند. به چنین رخ‌دادی ناهنجاری (anomaly) می‌گویند. فصل ِ ۱۹ ی ِ مرجع ِ [۲] را ببینید. اگر در کوانتش ِ نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ کوانتمی یک ناهنجاری در بقای ِ بار ِ الکتریکی به دست می‌آمد، با توجه به آن که بقای ِ بار ِ الکتریکی از نظر ِ آزمایش‌گاهی کاملاً پذیرفته شده است، آن‌گاه نتیجه می‌گرفتیم که نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ کوانتمی نظریه‌ی ِ خوبی نیست یا به‌تر بگویم نظریه‌ی ِ نامربوطی است.

[13] توجه کنید که اتحاد ِ وارْد شکل ِ ضعیف‌تری از قانون ِ بقای ِ بار ِ الکتریکی است چه‌را که در معادله‌ی ِ (59) فرض‌کرده‌ایم که چهاربردار ِ k^μ یک چهاربردار ِ نورگونه است یعنی $k^2 = 0$. اثبات ِ اتحاد ِ وارْد در فصل ِ ۷ ِ مرجع ِ [۲] آمده است. اثبات ِ این اتحاد با استفاده از سازگاری ِ پیمانه‌ی ِ لورنتس با پیمانه‌ی ِ

در ادامه و باز برای ِ ساده‌گی فرض کنید که فوتون ِ مسأله‌ی ِ ما در راستای ِ محور ِ z منتشر شده است یعنی فرض کنیم که $k^\mu = (k, 0, 0, k)$. با جای‌گذاری در (59) نتیجه می‌شود که در این مسأله

$$M^0 = M^3. \tag{60}$$

حالا بیایید احتمال ِ کل ِ تولید ِ یک فوتون را محاسبه کنیم. این احتمال ِ کل با رابطه‌ی ِ $-\eta_{\mu\nu} M^\mu M^{*\nu}$ داده می‌شود. با توجه به تساوی ِ (60) معلوم است که

$$-\eta_{\mu\nu} M^\mu M^{*\nu} = |M_1|^2 + |M_2|^2. \tag{61}$$

این نتیجه به این معنا است که مجموع ِ احتمال ِ تولید ِ یک فوتون ِ طولی (نظیر ِ $\mu = 3$) و یک فوتون ِ اسکالر (نظیر ِ $\mu = 0$) صفر است. به عبارت ِ دیگر در یک فرآیند ِ فیزیکی احتمال ِ تولید ِ یک فوتون برابر ِ با مجموع ِ احتمال ِ تولید ِ فوتون‌های ِ عرضی است و در نتیجه در چنین فرآیندی فوتون‌های ِ غیر ِ عرضی تولید نمی‌شوند.

۵.۳ پیمانه‌ی لورنتس

همان‌طور که در ابتدای ِ این بخش گفتم پیمانه‌ی ِ لورنتس به معنای ِ برقراری ِ رابطه‌ی ِ عمل‌گری ِ $\partial.\hat{A} = 0$ است؛ به این معنا که فرض می‌کنیم،[14]

$$\left\langle \psi | \partial.\hat{A} | \psi \right\rangle = 0. \tag{62}$$

روشن است که این شرط با تقاضای ِ

$$\partial.\hat{A}^+ |\psi\rangle = 0, \tag{63}$$

برآورده می‌شود که در آن $\hat{A}^+$ تکه‌ای از عمل‌گر ِ $\hat{A}$ است که از عمل‌گرهای ِ فنا ساخته شده است. برای ِ حل ِ معادله‌ی ِ (63) توجه می‌کنیم که چون عمل‌گر ِ $\partial.\hat{A}^+$ یک عمل‌گر ِ خطی است می‌شود هر حالت ِ دست‌گاه را به صورت ِ زیر نمایش داد،

$A \to A' = A + \partial\varphi$ برای ِ $\Box\varphi = 0$ انجام می‌شود. با توجه به معادله‌ی ِ (56) بقای ِ بار ِ الکتریکی در نظریه‌ی ِ کوانتمی هم‌ارز ِ حفظ ِ آزادی ِ پیمانه‌ای در این نظریه است.

[14] مطالب ِ این بخش برگرفته از بخش ِ ۲ از فصل ِ ۳ ی ِ مرجع ِ [۳] است.

$$|\psi\rangle \equiv |\psi_{\rm T}\rangle\,|\phi\rangle\,, \tag{64}$$

که در آن $|\psi_{\rm T}\rangle$ نظیرِ فوتون‌هایِ عرضی و $|\phi\rangle$ هم نظیرِ فوتون‌هایِ غیرِ عرضی است. روشن است که شرطِ (63) قیدی بر $|\psi_{\rm T}\rangle$ نمی‌گذارد ولی تقاضا می‌کند که

$$\partial.\hat{A}^{+}\,|\phi\rangle = 0. \tag{65}$$

از این‌جا می‌شود نتیجه گرفت که مثلاً برای ِ فوتونی ِ با چهاربردار ِ تکانه‌ی ِ $k^\mu = (k,0,0,k)$،

$$\left[a_0(\vec{k}) - a_3(\vec{k})\right]|\phi\rangle = 0. \tag{66}$$

جالب است که ببینیم این شرط حالت ِ$|\phi\rangle$ را به طور ِ یکتا تعیین نمی‌کند.[15] برای ِ دیدن ِ این نکته ابتدا حالت ِ $|\phi_n\rangle$ را به عنوان ِ حالت ِ نظیر ِ n فوتون ِ غیر ِ عرضی که در راستای ِ z منتشر می‌شوند تعریف می‌کنم. از جبر ِ (51) معلوم است که عمل‌گر ِ شمارش ِ این فوتون‌ها با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،[16]

$$N = \int \frac{dk}{(2\pi)}\left[a_3^\dagger(k)a_3(k) - a_0^\dagger(k)a_0(k)\right], \tag{67}$$

از (66) معلوم می‌شود که

$$n\,\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 0. \tag{68}$$

یعنی

$$\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 0, \qquad n \neq 0 \tag{69}$$

$|\phi_n\rangle$ ها یک پایه‌ی ِ کامل برای ِ بسط ِ $|\phi\rangle$ می‌سازند،

$$|\phi\rangle = C_0\,|\phi_0\rangle + \sum_{n\neq 0} C_n\,|\phi_n\rangle\,, \tag{70}$$

که در آن $|\phi_0\rangle \equiv |0\rangle$. از رابطه‌ی ِ (69) معلوم است که $\langle\phi|\phi\rangle = |C_0|^2$. این نتایج، تمام ِ آن چیزی است که از قید ِ (66) نتیجه می‌شود. یعنی این قید ضرائب ِ C_n را تعیین نمی‌کند

[15] این امر مانسته‌ی ِ آزادی ِ پیمانه‌ای ِ $A \to A' = A + \partial\varphi$ برای ِ $\Box\varphi = 0$ است که پس از اعمال ِ پیمانه‌ی ِ لورنتس هم‌چنان برقرار است. در انتهای ِ بحث به این نکته دوباره اشاره خواهم کرد.

[16] ما پیش‌تر از این نکته در به دست آوردن ِ (54) استفاده کرده‌ایم. روابط ِ (55) را ببینید.

و ما آزادیم که هر مقداری را که بخواهیم برای ِ آن‌ها فرض کنیم. اما آیا این آزادی ِ پیمانه‌ای مشاهده‌پذیر است؟ برای ِ پاسخ به این پرسش می‌شود انرژی ِ حالت ِ $|\psi\rangle$ داده شده در معادله‌ی ِ (64) را حساب کنیم. با توجه به قید ِ (66) و با استفاده از (54) به آسانی می‌شود دید که

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}=\frac{\left\langle\psi_{\mathrm{T}}\right|\int\frac{dk}{(2\pi)}\omega(\vec{k})\left[a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k})+a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k})\right]\left|\psi_{\mathrm{T}}\right\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{T}}|\psi_{\mathrm{T}}\rangle}. \qquad (71)$$

این تساوی که نتیجه‌ی ِ پیمانه‌ی ِ لورنتس است دو معنی ِ خوب می‌دهد. اول این که انرژی ِ دست‌گاه نامنفی است و دوم آن که آزادی ِ ما در انتخاب ِ حالت ِ $|\phi\rangle$ تأثیر ِ مشاهده‌پذیری ندارد.

در پایان پیش‌نهاد می‌کنم که نشان‌دهید [۳]،

$$\left\langle\psi\middle|\hat{A}_\mu\middle|\psi\right\rangle=\partial_\mu\varphi, \qquad (72)$$

که در آن φ حلی از معادله‌ی ِ موج $\Box\varphi=0$ است. این نتیجه به روشنی نشان می‌دهد که آزادی‌ای که پس از اعمال ِ شرط ِ لورنتس (62) در انتخاب ِ $|\phi\rangle$ داریم هم‌ارز ِ آزادی‌ای است که در نظریه‌ی ِ کلاسیک در انتخاب ِ A_μ پس از اعمال ِ پیمانه‌ی ِ لورنتس داشتیم.

مراجع

[۱] فرهنگ ِ لران، «کوانتش ِ دوم و نظریه‌ی ِ ذره—تبادلی»، گاما۱۸ (۱۳۸۷) ۶۱.

[2] M.E. Peskin and D.V. Shroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, ISBN 0-201-50397-2.

[3] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, ISBN 0-07-032071-3.