درباره‌ی مکانیکِ کوانتومی.

اِم. بورن و پی. یوردَن

(دریافت 27 سپتامبرِ 1925)

در این‌جا ره‌یافتِ نظریِ اخیراً چاپ‌شده‌ی هایزنبرگ با روش‌های ریاضیِ ماتریسی به یک نظریه‌ی روش‌مند مکانیکِ کوانتومی (در وهله‌ی اول برای سیستم‌های با یک درجه‌ی آزادی) بسط داده می‌شود. پس از بررسیِ کوتاهی از این روش، معادلاتِ مکانیکیِ حرکت از اصلِ وردش استخراج شده و نشان داده می‌شود که با استفاده از شرطِ کوانتومیِ هایزنبرگ، اصلِ پایستگیِ انرژی و شرطِ بسامدِ بوهر از معادلاتِ مکانیکی به دست می‌آیند. با استفاده از نوسانگرِ ناهماهنگ به عنوانِ یک مثال، سؤال در موردِ یکتاییِ جواب و اهمیتِ فازهای ارتعاشاتِ جزئی پیش می‌آید. مقاله با تلاشی برای جا دادنِ قوانینِ میدانِ الکترومغناطیسی درونِ نظریه‌ی جدید پایان می‌پذیرد.

مقدمه. به نظرِ ما ره‌یافتِ نظریِ هایزنبرگ[1] که اخیراً با هدفِ برپائیِ یک فرمالیسمِ سینماتیکی و مکانیکیِ جدید، سازگار با نیازهای اساسیِ نظریه‌ی کوانتومی، در این مجله چاپ شده است، اهمیتِ بالقوه‌ی زیادی دارد. آن نماینده‌ی تلاشی است که با برپائی یک ساختارِ ادراکیِ جدید و واقعاً مناسب، به جای قبول کردنِ مفاهیمِ معمول به روشِ کمابیش مصنوعی و اجباری، می‌خواهد جای‌گاهی درخور به واقعیت‌های جدید بدهد. استدلالِ فیزیکی‌ای که هایزنبرگ را به این پیشرفت سوق داد چنان واضح توسطِ او توصیف شده است که هر تذکرِ تکمیلی‌ای زائد به نظر می‌رسد. اما، همان‌طور که خودش اشاره می‌کند، ره‌یافتِ او از جنبه‌های صوریِ

مقاله ترجمه‌ای است از ترجمه‌ی انگلیسی:

M. Born and P. Jordan, *Zur Quantenmechanik.*, Zs. f. Phys. **34** (1925) pp. 858-888.

که در کتابِ زیر آمده است:

Sources of Quantum Mechanics, edited by B. L. Van Der Waerden, 1968, Dover.

از آقای دکتر رکنی‌زاده، که امکان مقابله‌ی ترجمه‌ی فصل IV با متنِ آلمانی را فراهم آورد تشکر می‌شود.

مترجم: مریم حاجی‌رحیمی. گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب.

[1] W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **33**, 879, 1925

ریاضی در مراحلِ ابتدایی است. فرضیاتِ او، بدونِ آن که به طورِ کامل در یک نظریه‌ی تعمیم‌یافته تکمیل شود، تنها در مثال‌های ساده به کار گرفته شده‌اند. با این مزیت که با ایده‌های او در سراسرِ مراحلِ ساختشان آشنا شده‌ایم، اکنون (که تحقیقاتِ او کامل شده) می‌کوشیم که محتوای صوری ریاضیاتِ ره‌یافتِ او را روشن کرده و بعضی نتایجِ خود را در این‌جا ارائه دهیم. این نتایج نشان می‌دهند که با شروع از پیش‌فرض‌های هایزنبرگ، می‌توان یک نظریه‌ی بسته‌ی ریاضی از مکانیک کوانتومی ساخت که شباهت‌های بسیار نزدیکی با مکانیک کلاسیک نشان می‌دهد، اما هم‌زمان خصوصیاتِ مشخصه‌ی پدیده‌های کوانتومی را حفظ می‌کند.

برای این کار ابتدا، هم‌چون هایزنبرگ، خود را به سیستم‌های با یک *درجه‌ی آزادی* محدود کرده و فرض می‌کنیم که آن‌ها ـ از دیدگاهِ کلاسیکی ـ *متناوب* باشند. در این مقاله نظریه را به سیستم‌هائی که تعدادِ دل‌خواهی درجه‌ی آزادی دارند، و نیز به سیستم‌هائی که نامتناوب‌اند تعمیم خواهیم داد. یک تعمیمِ ارزشمند از ره‌یافتِ هایزنبرگ مربوط به وقتی است که خودمان را نه به بررسیِ مکانیکِ غیرِنسبیتی، و نه به محاسبات در دستگاهِ مختصاتِ دکارتی محدود کنیم. تنها قیدی که بر انتخابِ مختصات اعمال می‌کنیم آن است که بررسیِ خود را بر پایه‌ی *مختصاتِ* [کنش]ـ*زاویه* می‌سازیم، که در نظریه‌ی کلاسیکی توابعِ *متناوب* از زمان هستند. مسلماً، بعضی مواقع ممکن است استفاده از مختصاتِ دیگر معقول‌تر باشد: برای مثال، در موردِ یک جسمِ چرخان زاویه‌ی چرخشِ φ را معرفی می‌کنیم، که تابعی خطی از زمان می‌شود. هایزنبرگ در بررسیِ خود برای جسمِ چرخان هم به این ترتیب عمل کرد، اما، معلوم نیست که آیا ره‌یافتِ به‌کار رفته در آن‌جا را می‌توان از دیدگاهِ یک مکانیک کوانتومیِ سازگار توجیه کرد یا نه.

پایه‌ی ریاضیِ بحثِ هایزنبرگ *قانونِ ضرب* مقادیرِ نظریه‌ی کوانتومی است، که او با ملاحظاتی زیرکانه مربوط به بحث‌های تطابق به دست آورد. پیشبردِ فرمالیسمِ او، که ما در این‌جا ارائه می‌دهیم، بر پایه‌ی این واقعیت است که این قانونِ ضرب چیزی نیست جز قانونِ ریاضیِ معروفِ *ضربِ ماتریسی*. آرایه‌ی مربعیِ نامتناهی (با شاخص‌های گسسته یا پیوسته)، که در ابتدای بخشِ بعدی با نامِ *ماتریس* ظاهر می‌شود، نمایشی از کمیتِ فیزیکی است که در نظریه‌ی کلاسیکی به صورتِ تابعی از زمان داده شده است. در نتیجه روشِ ریاضیِ راهِ حلِ اصلی در مکانیکِ کوانتومیِ جدید، به جای تحلیلِ عددیِ عادی، با استفاده از *تحلیل ماتریسی* مشخص می‌شود.

با استفاده از این روش، تلاش کرده‌ایم بعضی از ساده‌ترین مسائل در مکانیک و الکترودینامیک را حل کنیم. یک *اصلِ وردشی*، که از ملاحظاتِ اصل تطابق به دست آمده است، به *معادلاتِ حرکتی* برای کلی‌ترین تابعِ هامیلتونی منجر می‌شود که بیشترین شباهت را با معادلاتِ کانونی کلاسیکی دارند. شرطِ کوانتومیِ هم‌بسته با یکی از روابطی که از معادلاتِ حرکت ناشی می‌شود، به ما اجازه می‌دهد که از یک نمادگذاریِ ماتریسیِ ساده استفاده کنیم. به کمکِ آن، می‌توان درستیِ کلیِ *اصلِ پایستگیِ انرژی* و *رابطه‌ی بسامدِ بوهر*

را به شکلی که توسطِ هایزنبرگ حدس زده شد، اثبات کرد: او نمی‌توانست این اثبات را حتی برای مثال‌های ساده‌ای که بررسی کرد، به تمامی انجام دهد. ما بعداً با جزئیاتِ بیشتر به یکی از این مثال‌ها برمی‌گردیم تا برای یافتنِ سهمی که فازهای ارتعاشاتِ جزئی در نظریه‌ی جدید دارند، زیربنایی بیابیم. در نهایت نشان می‌دهیم که قوانین اصلیِ میدانِ الکترومغناطیسی در خلاء را می‌توان به راحتی وارد کرد و این فرضِ ارائه شده توسطِ هایزنبرگ را ثابت می‌کنیم که مربعِ قدرمطلقِ هر عنصرِ ماتریسی که نماینده‌ی گشتاورِ الکتریکیِ یک اتم است، سنجه‌ای برای احتمالِ گذار است.

فصلِ I. محاسبه‌ی ماتریسی

§1. **عمل‌های مقدماتی. توابع.** ماتریس‌های نامتناهیِ مربعی را در نظر می‌گیریم[1]، که آن‌ها را با حروفِ سیاه نشان داده‌ایم تا از کمیت‌های معمولی که با حروفِ ساده نشان داده شده‌اند، تشخیص داده شوند،

$$\boldsymbol{a} = \Big(a(nm)\Big) = \begin{pmatrix} a(00) & a(01) & a(02) & \cdots \\ a(10) & a(11) & a(12) & \cdots \\ a(20) & a(21) & a(22) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}.$$

تساویِ دو ماتریس به صورتِ تساویِ مؤلفه‌های متناظرِ آن‌ها تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \qquad \text{یعنی} \qquad a(nm) = b(nm). \tag{1}$$

جمعِ ماتریسی به صورتِ جمعِ مؤلفه‌های متناظر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \qquad \text{یعنی} \qquad a(nm) = b(nm) + c(nm). \tag{2}$$

[1] جزئیاتِ بیشتر از جبرِ ماتریسی را می‌توان، برای مثال در

M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, (translated from English by Hans Beck); Leipzig, Teubner, 1910, §22-25;

و

R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Berlin, Springer, 1924, Chapter 1

دید.

ضربِ ماتریسی با قانونِ 'سطرها ضرب در ستون‌ها'، که از نظریه‌ی دترمینان‌ها با آن آشنا هستیم، تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} \quad \text{یعنی} \quad a(nm) = \sum_{k=0}^{\infty} b(nk)\ c(km). \tag{3}$$

توان‌ها به صورتِ تکرارِ ضرب تعریف می‌شوند. قاعده‌ی شرکت‌پذیری برای ضرب و قاعده‌ی پخشی برای جمع و ضربِ مرکب به کار می‌رود:

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}); \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}. \tag{5}$$

اما، قانونِ جابه‌جایی برای ضرب برقرار *نیست*: در حالتِ کلی درست نیست که قرار دهیم $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$. اگر $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ در این رابطه صدق کنند، می‌گوییم جابه‌جا می‌شوند. *ماتریسِ یکّه* که به صورتِ

$$\mathbf{1} = (\delta_{nm}), \qquad \begin{cases} \delta_{nm} = 0 \ \text{ برای } \ n \neq m \\ \delta_{nn} = 1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود، چنان است که

$$\boldsymbol{a}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \tag{6a}$$

ماتریسِ وارون $\boldsymbol{a}$، یعنی $\boldsymbol{a}^{-1}$، با [1]

$$\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = \mathbf{1} \tag{7}$$

تعریف می‌شود. برای *مقدارِ میان‌گینِ* ماتریسِ $\boldsymbol{a}$ ماتریسی را معرفی می‌کنیم که عناصرِ قطریش با عناصرِ $\boldsymbol{a}$ یک‌سان باشد در حالی که همه‌ی عناصرِ دیگرش صفر هستند:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \Big(\delta_{nm} a(nn)\Big). \tag{8}$$

[1] همان طور که می‌دانیم، برای ماتریس‌های مربعیِ *متناهی* $\boldsymbol{a}^{-1}$ با رابطه‌ی (7) به طورِ یکتا تعریف می‌شود، مشروط بر آن که دترمینانِ آن، A، ناصفر باشد. اگر $A = 0$ هیچ ماتریسِ وارونی برای $\boldsymbol{a}$ وجود ندارد.

جمعِ این عناصرِ قطری را جمعِ *قطریِ* ماتریسِ $\boldsymbol{a}$ می‌نامیم و به صورتِ $D(\boldsymbol{a})$ می‌نویسیم، یعنی

$$D(\boldsymbol{a}) = \sum_n a(nn). \tag{9}$$

از (3) به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر جمعِ قطریِ حاصل‌ضربِ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_m$ متناهی باشد، تحتِ بازآراییِ چرخه‌ایِ ضرایب عوض نمی‌شود:

$$D(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_m) = D(\boldsymbol{x}_r\boldsymbol{x}_{r+1}\cdots\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_{r-1}). \tag{10}$$

به وضوح، کافی است اعتبارِ این قاعده را فقط برایِ ضربِ دو ماتریس اثبات کنیم.

اگر عناصرِ ماتریس‌های $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ توابعی از پارامترِ t باشند، آن‌گاه

$$\frac{d}{dt}\ \sum_k a(nk)\ b(km) = \sum_k \{\dot{a}(nk)\ b(km) + a(nk)\ \dot{b}(km)\},$$

یا از تعریفِ (3):

$$\frac{d}{dt}\ (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\,\dot{\boldsymbol{b}}. \tag{11}$$

کاربردِ مکررِ (11) به

$$\frac{d}{dt}\ (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n) = \dot{\boldsymbol{x}}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_1\dot{\boldsymbol{x}}_2\cdots\boldsymbol{x}_n + \cdots + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\dot{\boldsymbol{x}}_n \tag{11'}$$

منجر می‌شود.

از تعاریفِ (2) و (3) می‌توانیم *توابع* ماتریسی را معرفی کنیم. برای شروع، کلی‌ترین تابع از این نوع، $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_m)$ را تابعی درنظر می‌گیریم، که بتوان آن را به صورتِ جمعِ تعدادِ متناهی یا نامتناهی از حاصلِ ضرب‌های توان‌های جملاتِ $\boldsymbol{x}_k$ در ضرایبِ عددی نشان داد.

با معادلاتِ

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y}_1,\ \ldots\ \boldsymbol{y}_n; \boldsymbol{x}_1,\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{y}_1,\ \ldots\ \boldsymbol{y}_n; \boldsymbol{x}_1,\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

می‌توانیم توابعِ $\boldsymbol{y}_l(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_n)$ را هم تعریف کنیم؛ یعنی، برای یافتنِ توابعِ $\boldsymbol{y}_l$ به شکلِ بالا، که در معادله‌ی (12) صدق کنند، تنها لازم است که $\boldsymbol{y}_l$ را به شکلِ یک دنباله از حاصلِ ضرب‌های با توان‌های فزاینده از $\boldsymbol{x}_k$ قرار داده و ضرایب را با جای‌گذاری در (12) به دست آوریم. می‌توان دید که همواره به تعدادِ مجهولات معادله به دست می‌آید. طبیعتاً، تعدادِ معادلات و مجهول‌ها بیشتر از وقتی است که آن‌ها را با استفاده از روشِ ضرایبِ نامعین در الگوی عادیِ تحلیل با وارد کردنِ ضربِ *جابه‌جایی* به دست می‌آوریم. در هر یک از معادلاتِ (12)، با جاگذاریِ دنباله برای $\boldsymbol{y}_l$ و کنارِ هم گذاردنِ جملاتِ مشابه، نه تنها یک جمله‌ی جمعیِ $C'\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$ بلکه یک جمله‌ی $C''\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1$ هم پیدا می‌کنیم و بنابراین باید هر دوی C' و C'' (یعنی، نه فقط $C' + C''$) را برابرِ صفر قرار دهیم. اما، این بدان خاطر ممکن شده است که در بسطِ هر $\boldsymbol{y}_l$، دو جمله‌ی $\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1$ و $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$، با دو ضریبِ ممکن ظاهر می‌شود.

§ 2. **مشتق‌گیریِ نمادی.** در این مرحله باید به دقت فرایندِ *مشتق‌گیری* از یک تابعِ ماتریسی را، که بعداً مرتباً در محاسبات به کار گرفته می‌شود، بررسی کنیم. از ابتدا باید توجه کرد که این فرایند تنها از جنبه‌های بسیار کمی شبیه به فرایندِ مشتق‌گیری در آنالیز رایج خواهد بود. برای مثال، این جا دیگر قوانینِ مشتق‌گیری از یک حاصلِ ضرب یا تابعی از یک تابعِ دیگر، در حالتِ کلی برقرار نیست. تنها اگر همه‌ی ماتریس‌هایِ حاضر با یک‌دیگر *جا به جا شوند*، می‌توان همه‌ی قوانینِ آنالیز رایج را برای این مشتق‌گیری به کار برد.

فرض کنید

$$\boldsymbol{y} = \prod_{m=1}^{s} \boldsymbol{x}_{l_m} = \boldsymbol{x}_{l_1}\boldsymbol{x}_{l_2}\cdots\boldsymbol{x}_{l_s}. \tag{13}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}_k} = \sum_{r=1}^{\beta} \delta_{l_r k} \prod_{m=r+1}^{s} \boldsymbol{x}_{l_m} \prod_{m=1}^{m=r-1} \boldsymbol{x}_{l_m}, \qquad \begin{cases} \delta_{jk} = 0 \quad \text{برای} \quad j \neq k \quad \text{و} \\ \delta_{kk} = 1. \end{cases} \tag{14}$$

این قانون را می‌توان به این صورت توضیح داد: در حاصل‌ضربِ داده شده، همه‌ی عامل‌ها را به صورتِ *مجزا* در نظر می‌گیریم (مثلاً نه به شکلِ $\boldsymbol{x}_1^3\boldsymbol{x}_2^2$، بلکه به شکلِ $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2$)؛ بعد به ترتیب هر عاملِ $\boldsymbol{x}_k$ را برمی‌داریم و دنباله‌ی پس از آن را از چپ در دنباله‌ی پیش از آن ضرب می‌کنیم. جمعِ همه‌ی این عبارات ضریبِ دیفرانسیلِ حاصلِ ضرب نسبت به این $\boldsymbol{x}_k$ است.

این فرایند را با چند مثال نشان می‌دهیم:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^n, \qquad \frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}} = n\boldsymbol{x}^{n-1}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1^n \boldsymbol{x}_2^n, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \boldsymbol{x}_1^{n-1}\boldsymbol{x}_2^m + \boldsymbol{x}_1^{n-2}\boldsymbol{x}_2^m\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_2^m\boldsymbol{x}_1^{n-1},$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1^2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{x}_1^2\boldsymbol{x}_2.$$

اگر علاوه بر این، تصریح شود که

$$\frac{\partial(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{y}_1}{\partial \boldsymbol{x}_k} + \frac{\partial \boldsymbol{y}_2}{\partial \boldsymbol{x}_k}, \tag{15}$$

آن‌گاه مشتقِ $\partial\boldsymbol{y}/\partial\boldsymbol{x}$ برای کلی‌ترین توابعِ تحلیلیِ $\boldsymbol{y}$ تعریف شده است.

با تعاریفِ بالا، همراه با تعریفِ جمعِ قطریِ (9)، رابطه‌ی

$$\frac{\partial D(\boldsymbol{y})}{\partial x_k(nm)} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}_k}\ (mn) \tag{16}$$

نتیجه می‌شود که سمتِ راستِ آن مؤلفه‌ی mn از ماتریسِ $\partial\boldsymbol{y}/\partial\boldsymbol{x}_k$ است. این رابطه را هم‌چنین می‌توان برای تعریفِ مشتق‌گیریِ $\partial\boldsymbol{y}/\partial\boldsymbol{x}_k$ به کار برد. واضح است که برای اثباتِ (16)، کافی است تابعِ $\boldsymbol{y}$ را به شکلِ (13) در نظر بگیریم. از (14) و (3) رابطه‌ی

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}_k}\ (mn) = \sum_{r=1}^{s} \delta_{l_r k} \sum_{r} \prod_{p=r+1}^{s} \boldsymbol{x}_{l_p}(\tau_p\tau_{p+1}) \prod_{p=1}^{r-1} \boldsymbol{x}_{l_p}(\tau_p\tau_{p+1});\\ \tau_{r+1} = m, \qquad \tau_{s+1} = \tau_1, \qquad \tau_r = n\end{gathered} \tag{17}$$

نتیجه می‌شود. از سوی دیگر، از (3) و (9) داریم:

$$\begin{gathered}\frac{\partial D(\boldsymbol{y})}{\partial x_k(mn)} = \sum_{r=1}^{s} \delta_{l_r k} \sum_{r} \prod_{p=1}^{r-1} \boldsymbol{x}_{l_p}(\tau_p\tau_{p+1}) \prod_{p=r+1}^{s} \boldsymbol{x}_{l_p}(\tau_p\tau_{p+1});\\ \tau_1 = \tau_{s+1}, \qquad \tau_r = n, \qquad \tau_{r+1} = m\end{gathered} \tag{17'}$$

مقایسه‌ی (17) و (17′) به (16) منجر می‌شود.

در این جا واقعیتی را برمی‌گزینیم که اهمیتِ آن بعداً معلوم می‌شود و می‌توان آن را از تعریفِ (14) به دست آورد: *مشتقاتِ جزئیِ یک حاصلِ ضرب نسبت به جای‌گشتِ چرخه‌ایِ عواملِ ضرب ناوردا هستند.* به خاطرِ (16) این را از (10) هم می‌توان دریافت.

برای به پایان بردنِ این بخشِ مقدماتی، چند توضیحِ اضافی به توابعِ دومتغیره $g(\boldsymbol{pq})$، تخصیص می‌دهیم. برای

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}^s \boldsymbol{q}^r \tag{18}$$

از (14) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{p}} = \sum_{l=1}^{s-1} \boldsymbol{p}^{s-1-l} \boldsymbol{q}^r \boldsymbol{p}^l, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{q}} = \sum_{j=1}^{r-1} \boldsymbol{q}^{r-1-j} \boldsymbol{p}^s \boldsymbol{q}^j \tag{18'}$$

کلی‌ترین تابعِ $g(\boldsymbol{pq})$ ی که باید در نظر گرفته شود باید طبقِ §1 با یک مجموعِ خطی از جملاتِ

$$\boldsymbol{z} = \prod_{j=1}^{k} \ (\boldsymbol{p}^{s_j} \boldsymbol{q}^{r_j}) \tag{19}$$

نشان داد شود. با خلاصه‌نویسیِ

$$\boldsymbol{P}_l = \prod_{j=l+1}^{k} \ (\boldsymbol{p}^{s_j} \boldsymbol{q}^{r_j}) \prod_{j=1}^{l-1} \ (\boldsymbol{p}^{s_j} \boldsymbol{q}^{r_j}), \tag{20}$$

می‌توان مشتقات را به صورتِ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{p}} &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=0}^{s_l-1} \boldsymbol{p}^{s_l-1-m} \boldsymbol{q}^{r_l} \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{p}^m, \\ \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{q}} &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=0}^{r_l-1} \boldsymbol{q}^{r_l-1-m} \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{p}^{s_l} \boldsymbol{q}^m. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

نوشت. از این معادلات یک نتیجه‌ی مهم می‌گیریم. ماتریس‌های

$$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{q}\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{p}\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{p} \tag{22}$$

را در نظر می‌گیریم. از (21) داریم

$$\boldsymbol{d}_1 = \sum_{l=1}^{k} (\boldsymbol{q}^{r_l} \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{p}^{s_l} - \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{p}^{s_l} \boldsymbol{q}^{r_l}),$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \sum_{l=1}^{k} (\boldsymbol{p}^{s_l} \boldsymbol{q}^{r_l} \boldsymbol{P}_l - \boldsymbol{q}^{r_l} \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{p}^{s_l}).$$

و بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 = \sum_{l=1}^{k} (\boldsymbol{p}^{s_l} \boldsymbol{q}^{r_l} \boldsymbol{P}_l - \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{p}^{s_l} \boldsymbol{q}^{r_l}).$$

در این‌جا عضوِ دومِ هر جمله عضوِ اولِ جمله‌ی بعدی را حذف می‌کند، و جمله‌ی اول و آخرِ جمعِ کلی نیز هم‌دیگر را حذف می‌کنند، به طوری که

$$\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 = 0. \tag{23}$$

به دلیلِ ویژگیِ **خطی بودنِ** $\boldsymbol{z}$، این رابطه نه تنها برای عبارت‌های $\boldsymbol{z}$ به شکلِ (19) ، بلکه در واقع برای توابعِ تحلیلیِ دل‌خواهِ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{pq})$ هم برقرار است [1].

در پایانِ این بررسیِ خلاصه از تحلیلِ ماتریسی، قانونِ زیر را ثابت می‌کنیم: *هر معادله‌ی ماتریسیِ*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_r) = 0$$

اگر در تمامِ ماتریس‌های $\boldsymbol{x}_j$ *یک و همان یک جای‌گشت برای همه‌ی سطرها و ستون‌ها اعمال شود کماکان معتبر است.* به این منظور، کافی است نشان دهیم که برای دو ماتریسِ $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ که بعداً به $\boldsymbol{a}'$ و $\boldsymbol{b}'$ تبدیل می‌شوند، شرایطِ ناوردایی زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})', \qquad \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{ab})',$$

که جملاتِ سمتِ راستِ هر یک، ماتریس‌هایی را نشان می‌دهد که به ترتیب از اعمالِ این تبدیل روی $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{ab}$ ایجاد شده‌اند.

این اثبات را به این صورت شروع می‌کنیم که ضربِ یک ماتریس مناسب را جای‌گزینِ عملِ جای‌گشت می‌کنیم [2].

---

[1] به طورِ کلی‌تر، برای توابعی از متغیرهای r، داریم

$$\sum_r \Big(\boldsymbol{x}_r \, \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}_r} - \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}_r} \, \boldsymbol{x}_r \Big) = 0$$

[2] روشِ اثباتِ اتخاذشده در این‌جا این مزیت را دارد که ارتباطِ نزدیکِ جای‌گشت‌ها با یک دسته‌ی مهم از تبدیلاتِ کلی‌ترِ ماتریس‌ها را نشان می‌دهد. اما درستیِ قانونِ موردِ سوال را به طورِ مستقیم هم می‌توان اثبات کرد اگر توجه کنیم که در تعاریفِ *تساوی*، هم‌چنین *جمع* و *ضربِ* ماتریس‌ها، هیچ استفاده‌ای از روابطِ ترتیب بینِ سطرها و ستون‌ها نشد.

جای‌گشت را به شکلِ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k_n \end{pmatrix}$$

می‌نویسیم و به آن یک *ماتریسِ جای‌گشت*،

$$\boldsymbol{p} = \Big(p(nm)\Big), \quad p(nm) = \begin{cases} 1 & \text{وقتی} \quad m = k_n \\ 0 & \text{در غیرِ این صورت} \end{cases}$$

نسبت می‌دهیم. ماتریسِ تبدیل‌یافته‌ی $\boldsymbol{p}$ عبارت است از

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \Big(\tilde{p}(nm)\Big), \quad \tilde{p}(nm) = \begin{cases} 1 & \text{وقتی} \quad n = k_m \\ 0 & \text{در غیرِ این صورت} \end{cases}$$

با **ضربِ** این دو در هم، داریم

$$\boldsymbol{p}\,\tilde{\boldsymbol{p}} = \Big(\sum_k p(nk)\,\tilde{p}(km)\Big) = (\delta_{nm}) = \mathbf{1}$$

زیرا دو عاملِ $p(nk)$ و $\tilde{p}(km)$ تنها وقتی هم‌زمان غیرِ صفر هستند که $k = k_n = k_m$، یعنی، وقتی $n = m$. بنابراین $\tilde{\boldsymbol{p}}$ وارونِ $\boldsymbol{p}$ است:

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}^{-1}.$$

اکنون اگر $\boldsymbol{a}$ یک ماتریس داده‌شده باشد، آن‌گاه

$$\boldsymbol{pa} = \Big(\sum_k p(nk)\,a(km)\Big) = \Big(a(k_n, m)\Big)$$

ماتریسی است که از جای‌گشتِ $\binom{n}{k_n}$ روی سطرهای $\boldsymbol{a}$ به دست می‌آید، و به طورِ مشابه

$$\boldsymbol{ap}^{-1} = \Big(\sum_k a(nk)\,\tilde{p}(km)\Big) = \Big(a(n, k_m)\Big)$$

ماتریسی است که از جای‌گشتِ ستون‌های $\boldsymbol{a}$ به دست می‌آید. به این ترتیب، اعمالِ یک و همان یک جای‌گشت روی سطرها و ستون‌های $\boldsymbol{a}$ به ماتریسِ

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{p}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}^{-1}$$

منجر می‌شود. از آن‌جا مستقیماً نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' &= \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{p}^{-1} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})',\\ \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}' &= \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{p}^{-1} \qquad = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})',\end{aligned}$$

که ادعای اولیه‌ی ما را ثابت می‌کند.

پس واضح است که از معادلاتِ ماتریسی هرگز نمی‌توان هیچ دنباله یا نظمِ معلومی برای رتبه‌ی عناصرِ ماتریسی به دست آورد.

به علاوه، معلوم است که یک قانونِ خیلی کلی‌تر برقرار است، که می‌گوید هر معادله‌ی ماتریسی تحتِ تبدیلاتِ به شکلِ

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{-1}$$

ناورداست، که در آن $\boldsymbol{b}$ یک ماتریسِ *دل‌خواه* را نشان می‌دهد. بعداً خواهیم دید که این لزوماً همیشه برای معادلاتِ دیفرانسیلِ ماتریسی درست نیست.

فصلِ II. دینامیک

§ 3. **قوانینِ اصلی.** سیستمِ دینامیکی قرار است با مختصه‌ی فضاییِ $\boldsymbol{q}$ و تکانه‌ی $\boldsymbol{p}$ توصیف شود، که با ماتریس‌های

$$\boldsymbol{q} = \left(q(nm)\mathrm{e}^{2\pi i\nu(nm)t}\right), \quad \boldsymbol{p} = \left(p(nm)\mathrm{e}^{2\pi i\nu(nm)t}\right) \tag{24}$$

نشان داده می‌شوند. این جا $\nu(nm)$ بسامدهای نظریه‌ی کوانتومی وابسته به انتقال‌های بینِ حالاتِ توصیف‌شده با *اعدادِ کوانتومیِ* n و m هستند. ماتریس‌های (24) باید هرمیتی باشند، یعنی، با ترانهاده‌شدنِ ماتریس، هر عنصر به مقدارِ مزدوجِ مختلطش تبدیل شود، شرطی که باید برای همه‌ی tهای حقیقی برقرار باشد. به این ترتیب داریم

$$q(nm)\ q(mn) = |q(nm)|^2 \tag{25}$$

و

$$\nu(nm) = -\nu(mn). \tag{26}$$

اگر $\boldsymbol{q}$ یک مختصه‌ی *دکارتی* باشد، آن‌گاه عبارتِ (25) معیاری از *احتمال* [1] انتقال‌های $n \leftrightarrows m$ است.

به علاوه، به

$$\nu(jk) + \nu(kl) + \nu(lj) = 0 \tag{27}$$

نیاز داریم. این را همراه با (26) می‌توان به این صورت توصیف کرد که: کمیت‌های W_n وجود دارند که

$$h\nu(nm) = W_n - W_m. \tag{28}$$

از این، همراه با روابطِ (2) و (3)، نتیجه می‌شود که تابعِ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{pq})$ همیشه و دوباره به شکلِ

$$\boldsymbol{g} = \Big(g(nm)\mathrm{e}^{2\pi i\nu(nm)t}\Big) \tag{29}$$

درمی‌آید و ماتریسِ $(g(nm))$ ِ درونِ آن دقیقاً از همان فرایندِ به کار رفته برای ماتریس‌های $(q(nm), p(nm))$ به دست می‌آید که قبلاً برای به دست آوردنِ $\boldsymbol{g}$ از $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$ به کار رفت. بدین دلیل از این پس از نمایشِ (24) به نفعِ نمادگذاریِ کوتاه‌تر

$$\boldsymbol{q} = \Big(q(nm)\Big), \quad \boldsymbol{p} = \Big(p(nm)\Big) \tag{30}$$

چشم‌پوشی می‌کنیم.

برای *مشتقِ زمانیِ* ماتریسِ $\boldsymbol{g} = (g(nm))$، با یادآوریِ (24) یا (29)، ماتریسِ

$$\dot{\boldsymbol{g}} = 2\pi i\Big(\nu(nm)g(nm)\Big) \tag{31}$$

را به دست می‌آوریم.

اگر وقتی $n \neq m$، داشته باشیم $\nu(nm) \neq 0$ ، که وضعیتی است که می‌خواهیم فرض کنیم، آن وقت رابطه‌ی $\dot{\boldsymbol{g}} = 0$ نشان می‌دهد که $\boldsymbol{g}$ یک ماتریسِ قطری با $g(nm) = \delta_{nm}g(nn)$ است.

[1] در این مورد § 8 را ببینید.

معادله دیفرانسیلِ ماتریسیِ $\dot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{a}$ نسبت به فرایندی که در آن جای‌گشتِ یکسانی به سطرها و ستون‌های همه‌ی ماتریس‌ها و نیز اعدادِ W_n اعمال می‌شود، ناورداست. برای درکِ این موضوع، ماتریسِ قطریِ

$$\boldsymbol{W} = (\delta_{nm} W_n)$$

را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{g} = \Big(\sum_k \delta_{nk} W_n g(km)\Big) = \Big(W_n g(nm)\Big),$$

$$\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{W} = \Big(\sum_k g(nk)\delta_{km} W_k\Big) = \Big(W_m g(nm)\Big),$$

یعنی، طبقِ (31)،

$$\dot{\boldsymbol{g}} = \frac{2\pi i}{h}\Big((W_n - W_m)g(nm)\Big) = \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}\,\boldsymbol{W}).$$

اگر اکنون $\boldsymbol{p}$ یک ماتریسِ جای‌گشت باشد، آن‌گاه تبدیل‌یافته‌ی $\boldsymbol{W}$، یعنی

$$\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{W}\boldsymbol{p}^{-1} = (\delta_{n_k m} W_{n_k})$$

یک ماتریسِ قطری است که W_nِ جای‌گشته را در قطرش دارد. بنابراین داریم

$$\boldsymbol{p}\,\dot{\boldsymbol{g}}\,\boldsymbol{p}^{-1} = \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{g}' - \boldsymbol{g}'\boldsymbol{W}') = \dot{\boldsymbol{g}}',$$

که $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{p}^{-1}$ و $\dot{\boldsymbol{g}}'$ مشتقِ زمانیِ $\boldsymbol{g}'$ است که طبقِ قاعده‌ی (31) با W_nِ جای‌گشته ساخته شده است.

به این ترتیب همان جای‌گشتی که روی سطرها وستون‌های $\boldsymbol{g}$ وارد می‌شود، برای $\dot{\boldsymbol{g}}$ هم اعمال می‌شود، و بنابراین ادعای ما اثبات شده است.

باید توجه داشت که برای تبدیلاتِ دل‌خواهی به شکلِ $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{-1}$ قاعده‌ی مشابهی درست *نیست* زیرا برای این‌ها $\boldsymbol{W}'$ دیگر یک ماتریسِ قطری نیست. با وجودِ این مشکل، به نظر می‌رسد یک بررسیِ کامل از این تبدیلات لازم است، زیرا اجازه‌ی دیدنِ ارتباط‌های عمیق‌ترِ نهفته در این نظریه را فراهم می‌آورد: ما بعداً به این نکته برمی‌گردیم [1].

[1] مراجعه کنید به ادامه‌ی این کار، که قرار است بلافاصله چاپ شود.

در موردِ تابعِ هامیلتونی به شکلِ

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{q})$$

ما هم همانندِ هایزنبرگ، فرض می‌کنیم *معادلاتِ حرکت* دقیقاً به همان شکلِ نظریه‌ی کلاسیکی باشند، به طوری که با استفاده از § 2 می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

اکنون در تلاشِ کلی‌تر برای واضح‌کردنِ معادلاتِ حرکتِ متعلق به یک تابعِ هامیلتونیِ دل‌خواهِ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{pq})$، ملاحظاتِ مربوط به اصل تطابق را به کار می‌بریم. این کار از دیدگاهِ مکانیکِ نسبیتی و مخصوصاً برای حلِ حرکتِ الکترون تحت تأثیرِ میدان‌های مغناطیسی لازم است. زیرا در این موردِ اخیر، تابعِ $\boldsymbol{H}$ را دیگر نمی‌توان در دستگاه مختصاتِ دکارتی با جمعِ دو تابع نشان داد که یکی از آن‌ها تابعی تنها از تکانه و دیگری تابعی تنها از مکان باشد.

به طورِ کلاسیکی، معادلاتِ حرکت را می‌توان از اصلِ کنش

$$\int_{t_0}^{t_1} L \ \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \{p\dot{q} - H(pq)\} \ dt = \text{Extermum} \tag{33}$$

به دست آورد.

اکنون اگر تصور کنیم در (33) بسطِ فوریه‌ی L جای‌گزین شده و بازه‌ی زمانیِ $t_1 - t_0$ به قدرِ کافی بزرگ اختیار شده است، درمی‌یابیم که تنها جمله‌ی ثابتِ L در انتگرال سهم دارد. بنابراین شکلی که اصلِ کنش پیدا می‌کند پیشنهاد می‌کند که در مکانیکِ کوانتومی به صورتِ زیر تبدیل شود:

جمعِ قطریِ $D(\boldsymbol{L}) = \sum_k L(kk)$ *باید اکسترموم شود:*

$$D(\boldsymbol{L}) = D\Big(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{pq})\Big) = \text{Extermum} \tag{34}$$

مثلاً، با انتخابِ مناسبِ $\boldsymbol{p}$ *و* $\boldsymbol{q}$*، در حالی که* $\nu(nm)$ *ثابت نگه داشته شده است.*

به این ترتیب، با صفر کردنِ مشتقاتِ $D(\boldsymbol{L})$ نسبت به مؤلفه‌های $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$، معادلاتِ حرکت به دست می‌آیند:

$$2\pi i\nu(nm)\ q(nm) = \frac{\partial D(\boldsymbol{H})}{\partial p(mn)},$$

$$2\pi i\nu(mn)\ p(mn) = \frac{\partial D(\boldsymbol{H})}{\partial q(mn)}.$$

از (26)، (31) و (16) مشاهده می‌شود که این معادلاتِ حرکت را همواره می‌توان به شکلِ *کانونیِ*

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

نوشت.

هایزنبرگ برای شرطِ کوانتش رابطه‌ی پیشنهادیِ توماس[۱] و کوهن[۲] را به کار برد. معادله‌ی

$$J = \oint p\ dq = \int_0^{1/\nu} p\dot{q}\ dt$$

مربوط به نظریه‌ی 'کلاسیکیِ' کوانتومِ را می‌توان، با معرفیِ بسطِ فوریه‌ی p و q،

$$p = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} p_\tau e^{2\pi i\nu\tau t}, \qquad q = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} q_\tau e^{2\pi i\nu\tau t},$$

به صورتِ

$$1 = 2\pi i \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \tau \frac{\partial}{\partial J}\ (q_\tau p_{-\tau}) \tag{36}$$

تبدیل کرد.

اگر در این‌جا داشته باشیم $p = m\dot{q}$، می‌توان p_τ را بر حسبِ q_τ بیان کرد و بنابراین معادله‌ی کلاسیکی‌ای را به دست آورد که اگر مطابقِ اصلِ تطابق به یک معادله‌ی تفاضلی تبدیل شود، به فرمول‌های توماس و کوهن منجر می‌شود. چون این‌جا باید از فرضِ $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{q}}$ پرهیز کرد، مجبور هستیم معادله‌ی (36) را مستقیماً به یک معادله‌ی تفاضلی تبدیل کنیم.

باید عبارتِ

---

[۱] W. Thomas, Naturwiss. **13**, 627, 1925

[۲] W. Kuhn, ZS. f. Phys. **33**, 408, 1925

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \tau \frac{\partial}{\partial J} \left(q_\tau p_{-\tau}\right)$$

با

$$\frac{1}{h} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \Big(q(n+\tau,n)p(n,n+\tau) - q(n,n-\tau)p(n-\tau,n)\Big)$$

مطابقت کند، که در سمتِ راستِ آن باید $p(nm)$ و $q(nm)$ هایی که یک شاخصِ منفی دارند را، برابرِ صفر گذاشت. بدین ترتیب شرطِ کوانتشِ مربوط به (36) را به صورتِ

$$\sum_k \Big(p(nk)q(kn) - q(nk)p(kn)\Big) = \frac{h}{2\pi i} \tag{37}$$

به دست می‌آوریم.

این دستگاهی است شاملِ بی‌نهایت معادله، یعنی یک معادله برای هر مقدارِ n.

به ویژه، برای $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{q}}$ این به

$$\sum_k \nu(kn)|q(nk)|^2 = \frac{h}{8\pi^2 m}$$

منجر می‌شود، که به راحتی می‌توان ثابت کرد با شکلِ هایزنبرگیِ شرطِ کوانتش، یا با رابطه‌ی توماس‌ـ کوهن سازگار است. رابطه‌ی (37) را باید تعمیمِ مناسبِ این معادله در نظر گرفت.

ضمناً از (37) دیده می‌شود که جمعِ قطریِ $D(\boldsymbol{pq})$ الزاماً نامتناهی می‌شود. زیرا در غیرِ این صورت باید از (10) رابطه‌ی $D(\boldsymbol{pq}) - D(\boldsymbol{qp}) = 0$ را داشته باشیم، در حالی که (37) به $D(\boldsymbol{pq}) - D(\boldsymbol{qp}) = \infty$ منجر می‌شود. پس ماتریس‌های موردِ نظر هرگز متناهی نیستند [1].

§ 4. **پیامدها. پایستگیِ انرژی و قوانین بسامد.** محتوای پاراگراف‌های قبلی قوانینِ اصلیِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید را به تمامی در برمی‌گیرد. همه‌ی قوانینِ دیگرِ مکانیکِ کوانتومی را، که می‌خواهیم درستیِ کلیِ آن‌ها را بیازماییم، باید بتوان از این اصولِ پایه *استخراج کرد*. در ابتدا قانونِ پایستگیِ انرژی و شرطِ بسامدِ بوهر، به عنوانِ مثال‌هایی از چنین قوانینی که باید اثبات شوند، مطرح می‌شود. اصلِ پایستگیِ انرژی می‌گوید که اگر $\boldsymbol{H}$ انرژی باشد، آن‌گاه $\dot{\boldsymbol{H}} = 0$، یا این‌که $\boldsymbol{H}$ یک *ماتریسِ قطری* است. مثلِ هایزنبرگ،

[1] به علاوه، این ماتریس‌ها از ماتریس‌های نامتناهیِ 'کران‌دار' که ریاضی‌دان‌ها تا این جا عمدتاً آن‌ها را مطالعه کرده‌اند هم نیستند.

عناصرِ قطریِ $\boldsymbol{H}$، $H(nn)$ ها را *انرژی‌های حالت‌های مختلفِ سیستم* تعبیر می‌کنیم و شرط‌هایِ بسامدِ بوهر ایجاب می‌کند که

$$h\nu(nm) = H(nn) - H(mm).$$

یا

$$W_n = H(nn) + \text{ثابت}.$$

کمیتِ

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\,\boldsymbol{p}$$

را در نظر می‌گیریم. از (11) و (35) در می‌یابیم که

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{d}} &= \dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\dot{\boldsymbol{p}} \\ &= \boldsymbol{q}\,\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\,\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

بنابراین از (22) و (23) نتیجه می‌گیریم که $\dot{\boldsymbol{d}} = 0$ و $\boldsymbol{d}$ یک ماتریسِ قطری است. اما عناصرِ قطریِ $\boldsymbol{d}$ تنها با شرطِ کوانتومیِ (27) تعیین می‌شوند. به طورِ خلاصه، با معرفیِ ماتریسِ $\mathbf{1}$ که در (6) تعریف شد به

$$\boldsymbol{pq} - \boldsymbol{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1} \tag{38}$$

می‌رسیم. معادله‌ی (38) را 'شرطِ کوانتشِ قوی‌تر' می‌نامیم و همه‌ی نتایجِ دیگر را بر مبنای آن پایه می‌گذاریم.

از شکلِ این معادله درمی‌یابیم که: اگر معادله‌ی (A) از (38) به دست آید، آن وقت اگر $\boldsymbol{p}$ با $\boldsymbol{q}$ و هم‌زمان h با $-h$ تعویض شود، (A) معتبر خواهد ماند. بدین دلیل، برای مثال تنها کافی است یکی از دو معادله‌ی زیر را از (38) استخراج کرد،

$$\boldsymbol{p}^n\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^n + n\frac{h}{2\pi i}\,\boldsymbol{p}^{n-1}, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{q}^n\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^n - n\frac{h}{2\pi i}\ \boldsymbol{q}^{n-1}, \tag{39'}$$

که به سادگی با استقراء شدنی است.

اکنون پایستگیِ انرژی و قانونِ بسامد را، که در بالا بیان شد، ابتدا برای موردِ

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{q})$$

اثبات می‌کنیم. از عباراتِ § 1، نتیجه می‌شود که می‌توان به طورِ صوری $\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{p})$ و $\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{q})$ را با بسط‌های توانیِ

$$\boldsymbol{H}_1 = \sum_s a_s\boldsymbol{p}^s, \qquad \boldsymbol{H}_2 = \sum_s b_s\boldsymbol{q}^s$$

عوض کرد. فرمول‌های (39) و (39′) نشان می‌دهند که

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{H} &= \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}}, \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{H} &= -\frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

مقایسه با معادلاتِ حرکتِ (35) به

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{H}), \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{H}). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

منجر می‌شود. اگر برای خلاصه‌نویسی، ماتریسِ $\boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{H}$ را با $\left|\begin{smallmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{g}\end{smallmatrix}\right|$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\left|\begin{matrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{a}\end{matrix}\right|\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\ \left|\begin{matrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{b}\end{matrix}\right|; \tag{42}$$

که از آن به طورِ کلی برای $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q})$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\dot{\boldsymbol{g}} = \frac{2\pi i}{h}\ \left|\begin{matrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{g}\end{matrix}\right| = \frac{2\pi i}{h}\ (\boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{H}). \tag{43}$$

برای اثباتِ این نتیجه کافی است $\dot{\boldsymbol{g}}$ را تصور کنیم که تابعی است از $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$، و از $\dot{\boldsymbol{p}}$ و $\dot{\boldsymbol{q}}$، که با استفاده از (11) و (11′) به دست می‌آیند، و از $|\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{g}}|$، که با استفاده از (42) به صورتِ تابعی از $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$ و $|\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{p}}|$ و $|\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{q}}|$ محاسبه می‌شود، و به دنبالِ آن (41) را به کار ببریم. به ویژه، اگر در (43) قرار دهیم $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{H}$، به دست می‌آوریم که

$$\dot{\boldsymbol{H}} = 0. \tag{44}$$

اکنون که درستیِ قانون پایستگیِ انرژی را بررسی کرده‌ایم و دریافته‌ایم که ماتریسِ $\boldsymbol{H}$ قطری است، می‌توان معادله‌ی (41) را به شکلِ

$$\begin{aligned} h\nu(nm)\ q(nm) &= \Big(H(nn) - H(mm)\Big)\ q(nm), \\ h\nu(nm)\ p(nm) &= \Big(H(nn) - H(mm)\Big)\ p(nm), \end{aligned}$$

درآورد، که از آن شرطِ بسامد به دست می‌آید.

اکنون اگر توابعِ هامیلتونیِ کلی‌ترِ $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{pq})$ را در نظر بگیریم، می‌توان به سادگی دید که در حالتِ کلی دیگر $\dot{\boldsymbol{H}}^*$ صفر نمی‌شود (مثال‌هایی مثلِ $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}$ به سادگی این را نشان می‌دهند). اما مشاهده می‌شود که تابعِ هامیلتونیِ $\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q} + \boldsymbol{qp}^2)$ به همان معادلاتِ حرکتِ $\boldsymbol{H}^*$ منجر شده و $\dot{\boldsymbol{H}}$ دوباره صفر می‌شود. در نتیجه می‌توانیم پایستگیِ انرژی و قانونِ بسامد را به این صورتِ بیان کنیم: *به هر تابعِ $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{pq})$ می‌توان یک تابعِ $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{pq})$ نسبت داد طوری که به عنوانِ هامیلتونی $\boldsymbol{H}^*$ و $\boldsymbol{H}$ به معادلاتِ حرکتِ یک‌سانی منجر شوند و برای این معادلاتِ حرکت $\boldsymbol{H}$ نقشِ یک انرژی را دارد که با گذشتِ زمان ثابت است و شرطِ بسامد را ارضا می‌کند.*

با در نظر گرفتنِ ملاحظاتِ گفته‌شده در بالا، کافی است نشان دهیم که تابعِ $\boldsymbol{H}$ که باید تعیین شود، نه تنها در شرایطِ

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{q}}, \tag{45}$$

صدق می‌کند، بلکه علاوه بر آن معادلاتِ (40) را هم برآورده می‌کند. از § 1 ، ماتریسِ $\boldsymbol{H}^*$ به طورِ صوری به شکلِ جمعِ حاصلِ ضرب‌های توان‌های $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$ نمایش داده می‌شود. به خاطرِ خطی بودنِ معادلاتِ (40) و (45) نسبت به $\boldsymbol{H}$ و $\boldsymbol{H}^*$، فقط باید جمله‌ی جمعیِ متناسبِ $\boldsymbol{H}$ را که همتای هر تک جمله‌ی جمعیِ $\boldsymbol{H}^*$ است، تعیین کنیم. پس تنها لازم است که موردِ

$$\boldsymbol{H}^* = \prod_{j=1}^{k} (\boldsymbol{p}^{s_j} \boldsymbol{q}^{r_j}) \tag{46}$$

را بررسی کنیم. از تذکراتِ § 2 معلوم می‌شود که اگر $\boldsymbol{H}$ را به صورتِ یک ترکیبِ خطی از آن حاصلِ ضرب‌های توانیِ $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$ نوشت که، با تعویضِ چرخه‌ایِ عواملِ ضرب، از $\boldsymbol{H}^*$ به دست می‌آیند، می‌توان معادلاتِ (45) را ارضا کرد؛ این‌جا جمعِ ضرایب باید برابرِ واحد شود. پاسخ به این سوال که این ضرایب چگونه انتخاب شوند که معادلاتِ (40) هم برآورده شوند، کم‌تر ساده است. شاید در این مرحله کافی باشد که موردِ $k = 1$، یعنی

$$\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{p}^s \boldsymbol{q}^r \tag{47}$$

را تعیین کنیم.

فرمولِ (39) را می‌توان به

$$\boldsymbol{p}^m \boldsymbol{q}^n - \boldsymbol{q}^n \boldsymbol{p}^m = m \frac{h}{2\pi i} \sum_{l=0}^{n-1} \boldsymbol{q}^{n-1-l} \boldsymbol{p}^{m-1} \boldsymbol{q}^l \tag{48}$$

تعمیم داد. [1]

برای $n = 1$ این تبدیل به (39) می‌شود؛ در حالتِ کلی (48) از این واقعیت ناشی می‌شود که به دلیلِ (39) داریم

$$\boldsymbol{p}^m \boldsymbol{q}^{n+1} - \boldsymbol{q}^{n+1} \boldsymbol{p}^m = (\boldsymbol{p}^m \boldsymbol{q}^n - \boldsymbol{q}^n \boldsymbol{p}^m) \boldsymbol{q} + m \frac{h}{2\pi i} \boldsymbol{q}^n \boldsymbol{p}^{m+1}.$$

فرمولِ جدیدِ

[1] یک تعمیمِ متفاوت با روابطِ

$$\boldsymbol{p}^m \boldsymbol{q}^n = \sum_{j=0}^{m,n} j! \binom{m}{j} \binom{n}{j} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^j \boldsymbol{q}^{n-j} \boldsymbol{p}^{m-j},$$

$$\boldsymbol{q}^n \boldsymbol{p}^m = \sum_{j=0}^{m,n} j! \binom{m}{j} \binom{n}{j} \left(-\frac{h}{2\pi i}\right)^j \boldsymbol{p}^{m-j} \boldsymbol{q}^{n-j},$$

انجام می‌شود که j تا کم‌ترینِ m و n را می‌گیرد.

$$\boldsymbol{p}^m\boldsymbol{q}^n - \boldsymbol{q}^n\boldsymbol{p}^m = n\ \frac{h}{2\pi i}\ \sum_{j=0}^{m-1}\ \boldsymbol{p}^{m-1-j}\boldsymbol{q}^{n-1}\boldsymbol{p}^j \tag{48'}$$

از جابه‌جاییِ $\boldsymbol{p}$ با $\boldsymbol{q}$ و تغییرِ علامتِ h به دست می‌آید.

مقایسه با (48) به

$$\frac{1}{s+1}\ \sum_{l=0}^{s}\ \boldsymbol{p}^{s-l}\boldsymbol{q}^r\boldsymbol{p}^l = \frac{1}{r+1}\ \sum_{j=0}^{r}\ \boldsymbol{q}^{r-j}\boldsymbol{q}^s\boldsymbol{p}^j \tag{49}$$

منتهی می‌شود.

اکنون ادعا می‌کنیم که: ماتریسِ $\boldsymbol{H}$ مربوط به $\boldsymbol{H}^*$ در (47) عبارت است از:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{s+1}\ \sum_{l=0}^{s}\ \boldsymbol{p}^{s-l}\boldsymbol{q}^r\boldsymbol{p}^l. \tag{50}$$

تنها لازم است معادلاتِ (40) را ثابت کنیم، که به این منظور مشتقاتِ (18′) را از § 2 یادآوری می‌کنیم.

اکنون از (50)، رابطه‌ی

$$\boldsymbol{Hp} - \boldsymbol{pH} = \frac{1}{s+1}\ (\boldsymbol{q}^r\boldsymbol{p}^{s+1} - \boldsymbol{p}^{s+1}\boldsymbol{q}^r),$$

را به دست می‌آوریم و طبقِ (48) این با معادله‌ی پایینیِ (40) یک‌سان است.

به علاوه، با استفاده از (49) رابطه‌ی

$$\boldsymbol{Hq} - \boldsymbol{qH} = \frac{1}{r+1}\ (\boldsymbol{p}^s\boldsymbol{q}^{r+1} - \boldsymbol{q}^{r+1}\boldsymbol{p}^s),$$

را می‌یابیم و طبقِ (48′) این با معادله‌ی بالاییِ (40) یک‌سان است. این اثباتِ ادعا را کامل می‌کند.

در حالی که در مکانیکِ کلاسیک پایستگیِ انرژی ($\dot{H} = 0$) مستقیماً از معادلاتِ کانونی معلوم است، همان طور که دیده می‌شود، همین اصلِ پایستگیِ انرژی در مکانیکِ کوانتومی، $\dot{\boldsymbol{H}} = 0$، مخفی‌تر است.

این‌که اثباتِ پایسته‌گیِ انرژی از اصل‌هائی که فرض کردیم اصلاً بدیهی نیست، می‌توان به این شکل دید که، با نزدیک‌تر شدن به روشِ اثباتِ کلاسیک، سعی کنیم ثابت‌بودنِ $\boldsymbol{H}$ را با محاسبه‌ی $\dot{\boldsymbol{H}}$ ثابت کنیم. برای این کار اول باید $\dot{\boldsymbol{H}}$ را با کمکِ (11) و (11′) به صورتِ تابعی از $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$ و $\dot{\boldsymbol{p}}$ و $\dot{\boldsymbol{q}}$ بنویسیم، و از آن جا مقادیرِ $-\partial\boldsymbol{H}/\partial\boldsymbol{q}$ و $\partial\boldsymbol{H}/\partial\boldsymbol{p}$ را جای‌گزین کنیم. $\dot{\boldsymbol{H}}$ به صورتِ تابعی از $\boldsymbol{p}$ و $\boldsymbol{q}$ به دست می‌آید. با استفاده از معادله‌ی (38) یا فرمول‌هایی که در پاورقیِ مربوط به معادله‌ی (48) آمدند، و از (38) نتیجه شده بودند،

می‌توان این تابع ($\dot{\boldsymbol{H}}$) را به عبارتی بر حسبِ جمله‌هائی از نوعِ $a\boldsymbol{p}^s\boldsymbol{q}^r$ تبدیل کرد، و باید ثابت کنیم که ضریبِ a در همه‌ی جمله‌ها صفر می‌شود. این محاسبه برای کلی‌ترین حالت، به گونه‌ای که در بالا در خطوطِ مختلفی آمد، به قدری پیچیده می‌شود [1] که به نظر ناممکن می‌رسد. این واقعیت که با این حال پایستگیِ انرژی و قانونِ بسامد را می‌توان در چنان متنِ کلی‌ای ثابت کرد، به نظر می‌رسد که زمینه‌های قوی ایجاد می‌کند تا امیدوار باشیم که این نظریه قوانینِ عمیقاً جاافتاده‌ی فیزیکی را به درستی شامل می‌شود.

در پایان، نتیجه‌ای را در این‌جا می‌افزاییم که به سادگی از روابطِ این بخش قابلِ استخراج است، این که: *معادلاتِ* (35)، (37) *را می‌توان با* (38) *و* (44) *جای‌گزین کرد (با* $\boldsymbol{H}$ *که نماینده‌ی انرژی است)؛ که در نتیجه‌ی آن بسامدها باید از شرطِ بسامد به دست آیند.*

در ادامه‌ی این مقاله، کاربردهای مهمی که از این نظریه ناشی می‌شوند را بررسی می‌کنیم.

فصلِ III. بررسیِ نوسان‌گرِ ناهماهنگ.

نوسان‌گرِ ناهماهنگ، که برایش

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{p}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\,\boldsymbol{q}^2 + \frac{1}{3}\lambda\,\boldsymbol{q}^3 \tag{51}$$

است، پیش‌تر توسطِ هایزنبرگ به تفصیل بررسی شده است. با این وجود، در این‌جا بررسیِ آن را با تعیینِ *کلی‌ترین* جوابِ معادلاتِ اصلیِ این مورد تکرار می‌کنیم. اگر معادلاتِ اصلیِ نظریه‌ی حاضر واقعاً کامل باشد و نیاز به تکمیلِ بیشتر نداشته باشد، آن‌گاه $|q(nm)|$ ، $|p(nm)|$، قدرِ مطلق‌های عناصرِ ماتریس‌های $\boldsymbol{q}$ و $\boldsymbol{p}$ باید توسطِ این معادلات *به طورِ یکتا* تعیین شوند، و به این ترتیب بررسیِ این موضوع برای مثالِ (51) مهم می‌شود. از سوی دیگر، انتظار داریم که هنوز در فازهای φ_{nm} و ψ_{nm} در روابطِ

$$q(nm) = |q(nm)|\mathrm{e}^{i\varphi_{nm}},$$
$$p(nm) = |p(nm)|\mathrm{e}^{i\psi_{nm}}$$

نایقینی داشته باشیم. برایِ نظریه‌ی آماری، مثلاً برهم کنشِ اتم‌های کوانتیده با میدان‌های تابشیِ خارجی، تعیینِ میزانِ دقیقِ این نایقینی اهمیتِ دارد.

[1] برای حالتِ $\boldsymbol{H} = (1/2m)\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{q})$، این کار را می‌توان با کمکِ (39′) بلافاصله انجام داد.

§ 5. **نوسان‌گرِ هماهنگ.** نقطه‌ی شروعِ بررسیِ ما نظریه‌ی نوسان‌گرِ هماهنگ است؛ برای λ ی کوچک، می‌توان حرکتی را که با معادله‌ی (51) توصیف شده به صورتِ یک اختلال در نوسانِ هماهنگِ معمولی با انرژیِ

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{p}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\,\boldsymbol{q}^2 \tag{52}$$

در نظر گرفت. حتی برای این مسئله‌ی ساده لازم است که تحلیلِ هایزنبرگ را تکمیل کنیم. او برای رسیدن به نتایجِ مهمی چون شکلِ جواب ملاحظاتِ اصلِ تطابق را به کار می‌گیرد: برای مثال، چون در شکلِ کلاسیکی تنها یک مؤلفه‌ی هماهنگ وجود دارد، هایزنبرگ ماتریسی را انتخاب می‌کند که تنها گذار بینِ حالت‌های مجاور را نمایش می‌دهد، و بنابراین به شکلِ زیر است

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 & q^{(01)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q^{(10)} & 0 & q^{(12)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q^{(21)} & 0 & q^{(23)} & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{53}$$

در این‌جا می‌کوشیم کلِ نظریه را بر پایه‌ی خودش، بدونِ کمک گرفتن از نظریه‌ی کلاسیکی بر پایه‌ی اصلِ تطابق، بنا کنیم. از این‌رو، تحقیق می‌کنیم که آیا می‌توان شکلِ ماتریسِ (53) را به تنهایی از روابطِ اصلی به دست آورد، یا اگر این ناممکن است، چه اصولِ موضوعه‌ی دیگری موردِ نیاز است.

از آن‌چه در § 3 در موردِ ناوردایی نسبت به جای‌گشتِ سطر و ستون‌ها گفته شد، بلافاصله می‌توان دید که هرگز نمی‌توان شکلِ دقیقِ ماتریسِ (53) را از معادلاتِ اصلی به دست آورد، زیرا اگر بر سطرها و ستون‌ها جای‌گشتِ یک‌سانی اعمال شود، معادلاتِ کانونی و شرطِ کوانتومی ناوردا می‌مانند و بنابراین یک جوابِ جدید و ظاهراً متفاوت به دست می‌آوریم. اما طبیعتاً همه‌ی این جواب‌ها تنها در نمادگذاری، یعنی در روشِ شماره‌گذاریِ عناصر، متفاوتند. ما در پیِ آن هستیم که ثابت کنیم همیشه می‌توان تنها با شماره‌گذاریِ جدیدِ عناصرِ جواب، آن را به شکلِ (53) در آورد. درایه‌هایِ معادله‌ی حرکتِ

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \omega_0^2 \boldsymbol{q} = 0 \tag{54}$$

چنین‌اند:

$$\Big(\nu^2(nm) - \nu_0^2\Big) q(nm) = 0, \tag{55}$$

که در این جا

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0, \qquad h\nu(nm) = W_n - W_m.$$

از شرطِ قوی‌ترِ کوانتشِ

$$\boldsymbol{pq} - \boldsymbol{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}, \tag{56}$$

نتیجه می‌شود که متناظر با هر n باید یک n' وجود داشته باشد طوری که $q(nn') \neq 0$ ، زیرا اگر مقداری برای n وجود داشته باشد که به ازای آن همه‌ی $q(nn')$ ها صفر شوند، آن‌گاه nـامین عنصرِ قطریِ $\boldsymbol{pq}-\boldsymbol{qp}$ باید صفر شود، که شرطِ کوانتش را نقض می‌کند. بنابراین معادله‌ی (55) لازم می‌دارد که همواره یک n' وجود دارد به طوری که

$$|W_n - W_{n'}| = h\nu_0.$$

اما چون در اصولِ پایه‌مان فرض کرده‌ایم که وقتی $n \neq m$ آن‌گاه انرژی‌ها همیشه فرق داشته باشند $(W_n \neq W_m)$، نتیجه می‌گیریم که حداکثر *دو* تا از این شاخص‌های n' و n'' می‌توانند وجود داشته باشند، زیرا $W_{n'}$، $W_{n''}$ جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوی

$$(W_n - x)^2 = h^2\nu_0^2$$

هستند؛ و اگر واقعاً *دو تا* از این شاخص‌های n'، n'' وجود داشته باشند، تنیجه می‌گیریم که بسامدهای متناظر باید به صورتِ زیر به هم مربوط باشند:

$$\nu(nn') = -\nu(nn''). \tag{57}$$

اکنون از (56) رابطه‌ی

$$\sum_k \nu(kn)|q(nk)|^2 = \nu(n'n)\{|q(nn')|^2 - |q(nn'')|^2\} = h/8\pi^2 \tag{58}$$

را به دست می‌آوریم و از پیِ آن انرژیِ (52) به صورتِ

$$H(nm) = \tfrac{1}{2}\ 4\pi^2 \sum_k \{-\nu(nk)\nu(km)\ q(nk)\ q(km) + \nu_0^2 q(nk)\ q(km)\}$$
$$= 2\pi^2 \sum_k q(nk)\ q(km)\{\nu_0^2 - \nu(nk)\ \nu(km)\}$$

خواهد بود. به ویژه، برای $m = n$ داریم:

$$H(nn) = W_n = 4\pi^2\nu_0^2\Big(|q(nn')|^2 + |q(nn'')|^2\Big). \tag{59}$$

به علاوه، اکنون می‌توانیم سه حالتِ ممکنِ زیر را از هم تمیز دهیم:

a) هیچ n'' ی وجود ندارد و $W_{n'} > W_n$؛

b) هیچ n'' ی وجود ندارد و $W_{n'} < W_n$؛

c) n'' وجود دارد.

اکنون در حالتِ b) n' را به جای n در نظر می‌گیریم؛ در این صورت حداکثر دو شاخصِ $(n')'$ و $(n')''$ وجود دارند و از آن‌ها، یکی باید برابرِ n باشد. پس دوباره به مواردِ a) و c) برمی‌گردیم و بنابراین می‌توانیم بررسیِ بیشترِ b) را کنار بگذاریم.

در حالتِ a) $\nu(n'n) = +\nu_0$ و از رابطه‌ی (58) داریم

$$\nu_0|q(nn')|^2 = h/8\pi^2, \tag{60}$$

و بنابراین از (59) رابطه‌ی

$$W_n = H(nn) = 4\pi^2\nu_0^2|q(nn')|^2 = \frac{1}{2}\nu_0 h.$$

پس به خاطرِ فرضِ $W_n \neq W$ برای $n \neq m$، حداکثر یک شاخصِ $n = n_0$ وجود دارد که برایش موردِ a) صادق است.

اگر چنین n_0 ی وجود داشته باشد، می‌توانیم یک دنباله از اعدادِ n_0، n_1، n_2، n_3، $\cdots$ مشخص کنیم به طوری که $(n_k)' = n_{k+1}$ و $W_{k+1} > W_k$. آن‌گاه حتماً $(n_{k+1})'' = n_k$. بنابراین برای $k > 0$، معادلاتِ (58) و (59) به معادلات زیر منجر می‌شود.

$$H(n_k n_k) = 4\pi^2\nu_0^2\{|q(n_k, n_{k+1})|^2 + |q(n_k, n_{k-1})|^2\}, \tag{61}$$

$$\frac{1}{2}h = 4\pi^2\nu_0\{|q(n_k, n_{k+1})|^2 - |q(n_k, n_{k-1})|^2\}, \tag{62}$$

از (60) و (62) نتیجه می‌شود که

$$|q(n_k, n_{k+1})|^2 = \frac{h}{8\pi^2\nu_o}(k+1) \tag{63}$$

و پس از آن، از (61) رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$W_{n_k} = H(n_k, n_k) = \nu_0 h(k + \frac{1}{2}). \tag{64}$$

اکنون، هنوز باید بررسی کنیم که آیا ممکن است هیچ مقداری برای n نباشد که حالتِ (a) برایش به کار رود. با شروع از یک n_0ِ دل‌خواه، می‌توانیم $n'_0 = n$ و $n''_0 = n_{-1}$ را ساخته و با هر یک از این دو تا آخری $n'_1 = n_2$، $n''_1 = n_0$ و $n'_{-1} = n_0$، $n''_{-1} = n_{-2}$ و غیره را بنویسیم. بدین ترتیب یک دنباله از اعدادِ $\cdots n_{-2}$، n_{-1}، n_0، n_1، n_2، $\cdots$ را به دست می‌آوریم و معادلاتِ (61)، (62) برای هر k بینِ $-\infty$ و $+\infty$ برقرار هستند. اما این غیرِ ممکن است، زیرا با (62) کمیت‌های $x_k = |q(n_{k+1}, n_k)|^2$ یک دنباله‌ی هم‌فاصله از اعداد را تشکیل می‌دهند، و چون مثبت هستند، باید یک مقدارِ کم‌ترین وجود داشته باشد. آن‌گاه دوباره می‌توان شاخصِ مربوطه را با n_0 نشان داد و پس از آن به حالتِ قبلی برمی‌گردیم ـ بنابراین این جا هم، روابطِ (63)، (64) برقرارند.

به علاوه می‌توان دید که هر عددِ n باید درونِ اعدادِ n_k بگنجد، زیرا در غیرِ این‌صورت می‌توان با شروع از n یک دنباله‌ی جدیدِ (65) ساخت، و برای این رابطه (60) دوباره برقرار است. پس جملاتِ آغازینِ هر دو دنباله باید مقدارِ یک‌سانِ $W_n = H(nn)$ را داشته باشند، که ممکن نیست.

این ثابت می‌کند که شاخص‌های 0، 1، 2، 3، $\cdots$ را می‌توان به صورتِ یک دنباله‌ی جدیدِ n_0، n_1، n_2، n_3، $\cdots$ بازآرایی کرد به طوری که روابطِ (63)، (64) قابلِ استفاده باشند: آن‌گاه با این شاخص‌های جدید، جواب به شکلِ (53) هایزنبرگ درمی‌آید. پس این به صورتِ 'شکلِ طبیعیِ' جوابِ کلی ظاهر می‌شود. به خاطرِ (64)، جواب دارای خصوصیتِ

$$W_{n_{k+1}} > W_{n_k}$$

است. اگر، برعکس، قرار بگذاریم که $W_n = H(nn)$ همواره با n افزایش یابد، آن‌گاه حتماً نتیجه می‌گیریم که $n_k = k$؛ پس این اصل به طورِ یکتا شکلِ طبیعیِ جواب را می‌سازد. اما در آن صورت تنها

نمادگذاری تثبیت و محاسبات شفاف‌تر می‌شوند: *به لحاظِ فیزیکی* هیچ چیزِ جدیدی داده نشده است.

این است تفاوتِ بزرگِ بینِ این روش و روش‌های نیمه‌کلاسیکیِ قبلاً پذیرفته‌شده برای تعیینِ حالاتِ مانا. مدارهایی که به طورِ کلاسیکی محاسبه می‌شوند، به طورِ پیوسته با هم ترکیب می‌شوند؛ در نتیجه مدارهای کوانتومی که در مرحله‌ی بعدی انتخاب می‌شوند از همان ابتدا یک ترتیبِ خاص دارند. مکانیکِ جدید به این ترتیب خود را به صورتِ یک نظریه‌ی اساساً ناپیوسته ارائه می‌دهد که در آن هیچ سؤالی در موردِ ترتیبِ حالت‌های کوانتومی‌ای که فرآیندِ فیزیکی تعریف می‌کند مطرح نمی‌شود، بلکه در موردِ اعدادِ کوانتومی‌ای سؤال می‌شود که واقعاً دیگر چیزی بیش از شاخص‌های تمیزدهنده نیستند که می‌توان آن‌ها را بر اساسِ هر دیدگاهِ کاربردی‌ای (مثلاً بر اساسِ افزایشِ انرژیِ W_n) منظم و بهنجار کرد.

§ 6. نوسان‌گرِ ناهماهنگ. معادلاتِ حرکتِ

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \omega_0^2 \boldsymbol{q} + \lambda \boldsymbol{q}^2 = 0, \tag{66}$$

همراه با شرطِ کوانتش به دستگاه معادلاتِ زیر برای درایه‌ها منجر می‌شود:

$$\begin{gathered} \Big(\omega_0^2 - \omega^2(nm)\Big) q(nm) + \lambda \sum_k q(nk)\ q(km) = 0, \\ \sum_k \omega(nk)\ q(nk)\ q(kn) = -h/4\pi. \end{gathered} \tag{67}$$

برای یافتنِ جواب، بسط‌های

$$\begin{aligned} \omega(nm) &= \omega^0(nm) + \lambda\omega^{(1)}(nm) + \lambda^2\omega^{(2)}(nm) + \cdots \\ q(nm) &= q^0(nm) + \lambda q^{(1)}(nm) + \lambda^2 q^{(2)}(nm) + \cdots \end{aligned} \tag{68}$$

را معرفی می‌کنیم.

وقتی $\lambda = 0$، نوسان‌گرِ هماهنگ را داریم که در بخشِ قبل بررسی شد؛ جوابِ (53) را به شکلِ

$$q^0(nm) = a_n \delta_{n,m-1} + \overline{a_m} \delta_{n-1,m} \tag{69}$$

می‌نویسیم، که خط نشان‌دهنده‌ی مقدارِ مزدوجِ مختلط است. اگر مجذور یا توان‌های بالاترِ ماتریسِ $\boldsymbol{q}^0 = (q^0(nm))$ را تشکیل دهیم، به ماتریس‌هایی به شکلِ مشابه می‌رسیم، که از مجموعِ جملاتِ

$$(\xi)_{nm}^{(p)} = \xi_n \delta_{n,m-p} + \overline{\xi_m} \delta_{n-p,m} \tag{70}$$

ساخته شده‌اند. این ما را بر آن می‌دارد که جوابی به شکلِ زیر را امتحان کنیم.

$$\left.\begin{array}{c} q^0(nm) = (a)^{(1)}_{nm}, \\ q^{(1)}(nm) = (x)^0_{nm} + (x')^{(2)}_{nm}, \\ q^{(2)}(nm) = (y)^{(1)}_{nm} + (y')^{(3)}_{nm}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right\} \tag{71}$$

که در این جا مقادیرِ زوج و فردِ شاخصِ p همواره یکی‌درمیان‌اند. به واقع اگر این را در معادلاتِ تقریب بگذاریم

$$\lambda : \left\{\begin{array}{l} \left(\omega_0^2 - \omega^0(nm)^2\right)\ q^{(1)}(nm) - 2\omega^0(nm)\ \omega^{(1)}(nm)\ q^0(nm) \\ +\sum_k q^0(nk)\ q^0(km) = 0, \\ \sum_k \{\omega^0(nk)\ \left(q^0(nk)\ q^{(1)}(kn) + q^{(1)}(nk)\ q^0(kn)\right) \\ +\omega^{(1)}(nk)\ q^0(nk)\ q^0(kn)\} = 0. \end{array}\right\} \tag{72}$$

$$\lambda^2 : \left\{\begin{array}{l} \left(\omega_0^2 - \omega^0(nm)^2\right)\ q^{(2)}(nm) - 2\omega^0(nm)\ \omega^{(1)}(nm)\ q^{(1)}(nm) \\ -\left(\omega^{(1)}(nm)^2 + 2\omega^0(nm)\ \omega^{(2)}(nm)\right)\ q^0(nm) \\ +\sum_k \left(q^0(nk)\ q^{(1)}(km) + q^{(1)}(nk)\ q^0(km)\right) = 0, \\ \sum_k \{\omega^0(nk)\ \left(q^0(nk)\ q^{(2)}(km) + q^{(1)}(nk)\ q^{(1)}(km)\right) \\ +q^{(2)}(nk)\ q^0(km)\right) + \omega^{(1)}(nk)\ (q^0(nk)\ q^{(1)}(km) \\ +q^{(1)}(nk)\ q^0(km)\right) + \omega^{(2)}(nk)\ q^0(nk)\ q^0(km)\} = 0 \end{array}\right\} \tag{73}$$

و قاعده‌ی ضربِ

$$\begin{aligned} \sum_k \Omega_{nkm} (\xi)^{(p)}_{nk} (\eta)^{(q)}_{km} = {} & \Omega_{n,n+p,n+p+q}\ \xi_n\ \eta_{n+p}\ \delta_{n,m-p-q} \\ & + \Omega_{n,n+p,n+p-q}\ \xi_n\ \overline{\eta}_{n+p-q}\ \delta_{n,m-p+q} \\ & + \Omega_{n,n-p,n-p+q}\ \overline{\xi}_{n-p}\ \eta_{n-p}\ \delta_{n,m+p-q} \\ & + \Omega_{n,n-p,n-p-q}\ \overline{\xi}_{n-p}\ \overline{\eta}_{n-p-q}\ \delta_{n,m+p+q} \end{aligned} \tag{74}$$

را در نظر داشته باشیم، هنگامِ صفر کردنِ هر یک از ضرایبِ پشتِ $\delta_{n,m-s}$، می‌بینیم که با جاگذاریِ (71) در حقیقت می‌توان همه‌ی شرایط را برآورده کرد و جملاتِ بالاتر هم به طورِ یک‌سان صفر می‌شوند.

به طورِ دقیق، نتیجه‌ی محاسبه به شرح زیر است:

اولین جمله‌ی (72)، پس از جاگذاریِ عباراتِ (71)،

$$\left.\begin{aligned} 2\omega_0^2 x_n + |a_n|^2 + |a_{n-1}|^2 &= 0, \\ -3\omega_0^2 x'_n + a_n a_{n+1} &= 0, \\ \omega^{(1)}_{n,n-1} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

را می‌دهد، و دومین جمله متحداً برقرار است. به این ترتیب داریم

$$\left.\begin{aligned} x_n &= -\frac{|a_n|^2 + |a_{n-1}|^2}{2\omega_0^2}, \\ x'_n &= \quad \frac{a_n a_{n+1}}{3\omega_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

اولین معادله‌ی (73) به

$$\left.\begin{aligned} 2\omega_0 a_n \omega^{(2)}_{n,n+1} + 2a_n x_{n+1} + 2a_n x_n + \bar{a}_{n-1} x'_{n-1} + \bar{a}_{n+1} x'_n &= 0, \\ -8\omega_0^2 y'_n + a_n x'_{n+1} + a_{n+2} x'_n &= 0, \\ \omega^{(1)}_{n,n-2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

منجر می‌شود، در حالی که دومی متحداً برآورده نمی‌شود، بلکه رابطه‌ی

$$\left.\begin{aligned} a_n \bar{y}_n + \bar{a}_n y_n - a_{n-1}\bar{y}_{n-1} - \bar{a}_{n-1} y_{n-1} + 2|x'_n|^2 - 2|x'_{n-2}|^2 \\ -\frac{\omega^{(2)}_{n,n+1}}{\omega_0}\ |a_n|^2 - \frac{\omega^{(2)}_{n,n-1}}{\omega_0}\ |a_{n-1}|^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

را می‌سازد که از رویش می‌توان y_n را تعیین کرد. جواب عبارت است از:

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(2)}_{n,n+1} &= \frac{1}{3\omega_0^3}\ (|a_{n+1}|^2 + |a_{n-1}|^2 + 3|a_n|^2), \\ y'_n &= \frac{1}{12\omega_0^4} a_n a_{n+1} a_{n+2}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

به علاوه، اگر برای خلاصه‌سازی

$$\eta_n = a_n \tilde{y}_n + \tilde{a}_n y_n \tag{80}$$

را معرفی کنیم، η ها با معادله‌ی

$$\left.\begin{aligned}\eta_n-\eta_{n-1}=\frac{1}{\omega_0^4}(|a_n|^4-|a_{n-1}|^4+\frac{1}{9}|a_n|^2|a_{n+1}|^2\\ -\frac{1}{9}|a_{n-1}|^2|a_{n-2}|^2).\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

تعیین می‌شوند. عبارت‌هایِ (76) و (79) نشان می‌دهند که کمیت‌های x_n، x'_n، y'_n را می‌توان از طریقِ جوابِ تقریبِ مرتبه صفرمِ a_n بیان کرد. پس فازهای آن‌ها با فازهای نوسان‌گرِ هماهنگ تعیین می‌شوند. برای کمیت‌های y_n، ظاهراً وضعیت فرق می‌کند، زیرا اگرچه می‌توان η را به طورِ یکتا از (81) معلوم کرد، y_n را نمی‌توان به طورِ قطعی از (80) به دست آورد. امکان دارد که جمله‌ی مرتبه‌ی بالاترِ بعدیِ تقریب به یک معادله‌ی کمکی برای تعیینِ y_n منجر شود. در این‌جا باید این سؤال را پاسخ‌نداده رها کنیم ولی می‌خواهیم بر اهمیتِ آن به عنوانِ یک نقطه‌ی اساسی در رابطه با کامل بودنِ کلِ نظریه تاکید کنیم. همه‌ی سؤالاتِ آماری همواره در نهایت به این می‌رسند که آیا این فرضِ ما، که در هر سطر یا (ستونِ) ماتریس یکی از فازهای $q(nm)$ نامعین باقی می‌ماند، درست است یا نه.

در پایان، روابطِ دقیقِ حاصل از جاگذاریِ جوابِ نوسان‌گرِ هماهنگ، که قبلاً (§ 5) پیدا کردیم، را ارائه می‌دهیم. در شکلِ طبیعی، با (63)، به صورتِ زیر در می‌آید:

$$a_n=\sqrt{C(n+1)}\mathrm{e}^{i\varphi_n},\qquad C=h/4\pi\omega_0=h/8\pi^2\nu_0. \tag{82}$$

از آن‌جا، با استفاده از (76)، (79)، (81) می‌رسیم به

$$\left.\begin{aligned}x_n&=-\frac{C}{2\omega_0^2}(2n+1),\\ x'_n&=\frac{C}{3\omega_0^2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\mathrm{e}^{i(\varphi_n+\varphi_{n+1})}\\ y'_n&=\frac{\sqrt{C^3}}{12\omega_0^4}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\mathrm{e}^{i(\varphi_n+\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2})}\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{(1)}_{n,n-1}=0,\qquad \omega^{(1)}_{n,n-2}=0,\\ &\omega^{(2)}_{n,n-1}=-\frac{5C}{3\omega_2^3}\ n;\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

یعنی،

$$\eta_n - \eta_{n-1} = \frac{11C^2}{9\omega_0^4}(2n+1),$$

$$\eta_n = a_n\bar{y}_n + \bar{a}_n y_n = \frac{11C^2}{9\omega_0^4}(n+1)^2.$$

اگر قرار دهیم $y_n = |y_n|\mathrm{e}^{i\psi_n}$، آن وقت

$$|y_n|\ \cos(\varphi_n - \psi_n) = \frac{\eta_n}{2|a_n|} = \frac{11\sqrt{C^3}}{18\omega_0^4}\sqrt{n+1^3}. \tag{85}$$

در این تقریب، y_n را نمی‌توان دقیق‌تر از این یافت.

با این حال، می‌خواهیم معادلاتِ نهایی را با فرضِ $\psi_n = \varphi_n$ بنویسیم. این‌ها (تا جمله‌هایِ از مرتبه‌ی بالاتر از 2 نسبت به λ) عبارتند از:

$$\left.\begin{aligned} \omega(n,n-1) &= \omega_0 - \lambda^2\ \frac{5C}{3\omega_0^3}\ n + \cdots\ , \\ \omega(n,n-2) &= 2\omega_0 + \cdots\ ; \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned} q(n,n) &= -\lambda\ \frac{C}{2\omega_0^2}\ (2n+1) + \cdots\ , \\ q(n,n-1) &= \sqrt{Cn}\mathrm{e}^{i\varphi_{n-1}}\ \Big(1 + \lambda^2\ \frac{11Cn}{18\omega_0^4} + \cdots\Big), \\ q(n,n-2) &= \lambda\ \frac{C}{3\omega_0^2}\sqrt{n(n-1)}\mathrm{e}^{i(\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2})} + \cdots\ , \\ q(n,n-3) &= \lambda^2\ \frac{\sqrt{C^3}}{12\omega_0^4}\sqrt{n(n-1)(n-2)}\mathrm{e}^{i(\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}+\varphi_{n-3})} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

انرژی را هم مستقیماً محاسبه کرده و رابطه‌ی زیر را به دست آورده‌ایم:

$$W_n = h\nu_0(n+\frac{1}{2}) - \lambda^2\ \frac{5C^2}{3\omega_0^2}\Big(n(n+1) + \frac{17}{30}\Big) + \cdots \tag{88}$$

شرطِ بسامد واقعاً برآورده می‌شود، زیرا، با به یاد آوردنِ (82)، داریم

$$W_n - W_{n-1} = h\nu_0 - \lambda^2 \ \frac{2C^2}{\omega_0^2} \ n + \cdots = \frac{h}{2\pi} \ \omega(n, n-1),$$

$$W_n - W_{n-2} = 2h\nu_0 + \cdots \qquad\qquad = \frac{h}{2\pi} \ \omega(n, n-2).$$

این مشاهده که حتا در پائین‌ترین مرتبه ناهمخوانی‌ای با نظریه‌ی کلاسیک هست که با معرفیِ عددِ کوانتومیِ نیمه‌صحیحِ $n' = n + \frac{1}{2}$ رفع می‌شود، را می‌توانیم به رابطه‌ی (88) مربوط کنیم. هایزنبرگ پیش‌تر به این نکته توجه کرده است. از قضا، عبارت‌های $\omega(n, n-1)$ که با (86) داده می‌شوند از همه نظر *دقیقاً* با بسامدهای کلاسیکی مطابقند. برای مقایسه، توجه می‌کنیم که انرژیِ کلاسیکی به شکلِ [1]

$$W_n^{(\mathrm{cl})} = h\nu_0 n - \lambda^2 \ \frac{5C^2}{3\omega_0^2} \ n^2 + \cdots$$

است و بنابراین بسامدِ کلاسیکی چنین است

$$\omega_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{h} \ \frac{\partial W_n^{(\mathrm{cl})}}{\partial n} = h\nu_0 - \lambda^2 \ \frac{5C^2}{3\omega_0^2} \ n + \cdots$$

$$= \omega_{\mathrm{qu}}(n, n-1) = \frac{1}{h} \ (W_n^{(\mathrm{qu})} - W_{n-1}^{(\mathrm{qu})}).$$

بالاخره، تحقیق کرده‌ایم که عبارتِ (88) را (تا یک ثابتِ اضافه) از فرمولِ اختلالِ کرامرز-بورن هم می‌توان به دست آورد.

فصلِ IV. نکاتی درباره‌ی الکترودینامیک.

طبقِ نظرِ هایزنبرگ مربعاتِ قدرِ مطلقِ $|q(nm)|^2$، وقتی عناصرِ $\boldsymbol{q}$ در مختصاتِ دکارتی‌اند، تعیین‌کننده‌ی احتمالاتِ گذار هستند. در انتها می‌خواهیم توجیهی برای این فرض بر اساسِ ملاحظاتِ کلی‌تری ارائه دهیم. بدین منظور پاسخ به این پرسش ضروری است که معادلاتِ اساسیِ الکترودینامیک در این نظریه‌ي جدید چگونه بازتعبیر می‌شوند. اما می‌خواهیم تاکید کنیم که ملاحظاتی که در این جا آورده شده‌اند موقتی هستند و

[1] رجوع کنید به

M. Born, Atommechanik (Berlin, 1925), Chapter 4, § 42, p. 294;

برای سازگاری با راهِ حلِ کنونی باید $a = \frac{1}{3}$ را در فرمولِ (6) قرار داد.

صرفاً نمایاننده‌ی نظرِ کلیِ ما در این موضوع هستند. بررسیِ مفصلِ این موضوع، و مخصوصاً بررسیِ رابطه‌ی این نظریه با نظریه‌ی کوانتومیِ نور، بعداً ارائه می‌شود.

در این‌جا تنها نکاتی را بیان می‌کنیم که می‌توان آن‌ها را بدونِ ارجاع به شکلِ دقیقِ شرطِ کوانتش برای سیستم‌های با چند درجه‌ی آزادی، به دست آورد. از ملاحظاتِ زیر می‌توان دید که این موضوع قبلاً تا حدودی در الکترودینامیک مطرح شده است. کاواکِ نوسان‌گرِ الکترومغناطیسی نشان‌گرِ یک سیستمِ با بی‌نهایت درجه‌ی آزادی است. با این وجود اصولی که در فصولِ قبلی بسط و گسترش یافته و تنها مربوط به سیستم‌های با یک درجه‌ی آزادی بود، برای بررسیِ ما کافی است زیرا [نوساناتِ کاواک] بر حسبِ نوساناتِ طبیعی تجزیه و به دستگاهی از نوسان‌گرهای غیرجفت‌شده تبدیل می‌شود. در این صورت در چگونگیِ رفتار با این سیستم ابهامی باقی نمی‌ماند. این نشان می‌دهد که این حقیقت که معادلاتِ اساسیِ الکترومغناطیسی خطی هستند (اصلِ برهم‌نهی)، اهمیتِ ویژه‌ای دارد؛ زیرا نتیجه می‌دهد که نوسان‌گرهای جای‌گزین هماهنگ هستند، و تنها در نوسان‌گرهای هماهنگ ـ برخلافِ دیگر سیستم‌ها ـ قضیه‌ی انرژی، مستقل از شرطِ کوانتش، معتبر است: از

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2 + \omega_0^2 \boldsymbol{q}^2)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{H}} &= \tfrac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{p}} + \omega_0^2 \dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q} + \omega_0^2 \boldsymbol{q}\dot{\boldsymbol{q}}) \\ &= \tfrac{1}{2}\omega_0^2(-\boldsymbol{q}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

پس انتظار می‌رود که به شکلِ مشابه، بتوان به طورِ کاملاً عام قضایایِ انتگرالیِ الکترودینامیک در خلاء (قضیه‌ی انرژی‌ـ‌تکانه) را به تنهایی از شکلِ ماتریسیِ معادلاتِ ماکسول بدونِ وارد کردنِ شرطِ کوانتش به دست آورد. با نشان دادنِ این موضوع، هم‌زمان به روشی دست می‌یابیم که با آن ادعای هایزنبرگ در موردِ معنیِ $|q(nm)|^2$ ها را اثبات کنیم.

§ 7. **معادلاتِ ماکسول، قضیه‌ی انرژی‌ـ‌تکانه.** طبقِ معمول قرار می‌گذاریم بردارها را با حروفِ آلمانی نشان دهیم، در حالی که تفاوتِ بینِ اعداد و ماتریس‌ها با حروفِ سیاه نشان داده می‌شود. واحدهای به کار رفته در کتابِ آبراهام [1] را به کار می‌بریم.

[1] M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. Leipzig 1914

فرآیندهایِ الکترومغناطیسی در خلاء را می‌توان با برهم‌نهیِ امواجِ تخت نمایش داد. در چنین موجِ تختی شدتِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{H}$ را به صورتِ ماتریس‌هایی در نظر می‌گیریم، که عناصرِ آن‌ها، نسبت به دستگاه مختصاتِ مناسب، امواجِ تختِ نوسان‌گرهای هماهنگ هستند:

$$\mathfrak{E} = \Big(\mathfrak{E}(nm)e^{2\pi i\nu(nm)\left(t-\frac{x}{c}\right)}\Big). \tag{89}$$

البته باید توجه کرد که n، m دیگر مقید به یک سریِ گسسته از مقادیر نبوده و نشان‌گرِ اعدادِ منفرد نیستند، بلکه سیستمِ اعداد (بردارها) را نشان می‌دهد.

معادلاتِ ماکسول را به شکلِ معادلاتِ ماتریسیِ می‌نویسیم:

$$\mathrm{rot}\ \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\ \dot{\mathfrak{E}} = 0, \qquad \mathrm{rot}\ \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\ \dot{\mathfrak{H}} = 0. \tag{90}$$

مشتق‌گیری نسبت به x، y، z و t، برای هر عنصرِ ماتریسِ موردِ نظر انجام می‌شود [1].

اکنون می‌خواهیم قضیه‌ی انرژی‌ـ‌تکانه را به دست آوریم؛ بدین منظور لازم است که چند نکته در موردِ ضربِ بردارهایِ ماتریسی را بیان کنیم.

ضربِ نرده‌ای را به صورتِ

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z, \tag{91}$$

و ضربِ برداری را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y. \tag{92}$$

چون ضربِ ماتریسی جابه‌جاپذیر نیست، روابطِ

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}, \qquad [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}]$$

در حالتِ کلی برقرار نیست.

در عوض، ادعا می‌کنیم که:

[1] در مواردی دیدگاهِ متفاوتی از میدانِ الکترومغناطیسی لازم است، که در آن مختصاتِ فضایی خودشان به جای عدد، به صورتِ ماتریس ظاهر می‌شوند؛ این در حاصلِ مشتقاتِ فضائی در معادلاتِ ماکسول تغییرِ متناظری ایجاد می‌کند. ما به این موضوع در ادامه‌ی کار می‌پردازیم.

$$\operatorname{div}\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = (\operatorname{rot}\,\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}, \operatorname{rot}\,\mathfrak{B}). \tag{93}$$

اکنون چگالیِ انرژیِ $\boldsymbol{W}$ (به صورتِ یک ماتریسِ نرده‌ای) را به شکلِ زیر تعریف می‌کنیم

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2). \tag{94}$$

آن‌گاه با (11) داریم

$$8\pi\dot{\boldsymbol{W}} = \mathfrak{E}\dot{\mathfrak{E}} + \dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{H}} + \dot{\mathfrak{H}}\mathfrak{H},$$

و به خاطرِ (90) داریم:

$$\frac{8\pi}{c}\boldsymbol{W} = (\mathfrak{E}, \operatorname{rot}\,\mathfrak{H}) + (\operatorname{rot}\,\mathfrak{H}, \mathfrak{E}) - (\mathfrak{H}, \operatorname{rot}\,\mathfrak{E}) - (\operatorname{rot}\,\mathfrak{E}, \mathfrak{H}),$$

پس (93) به

$$\dot{\boldsymbol{W}} + \operatorname{div}\,\mathfrak{S} = 0, \tag{95}$$

منجر می‌شود که در آن

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{8\pi}([\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{H}\mathfrak{E}]). \tag{96}$$

این قضیه‌ی پوینتینگ برای الکترودینامیکِ ماتریسی است؛ $\mathfrak{S}$ بردارِ تابش را نشان می‌دهد.

به طورِ مشابه، تکانه را می‌توان به دست آورد: اگر تنشِ ماکسولی را به صورتِ

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{xx} &= \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + (\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2), \\ \boldsymbol{T}_{yz} &= \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_y) \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

و چگالیِ تکانه‌ی تابش را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{8\pi c}([\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{H}\mathfrak{E}]). \tag{98}$$

بنابراین با محاسبه‌ی مشابهی به دست می‌آوریم:

$$\dot{\mathfrak{g}}_x = \frac{\partial \boldsymbol{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_{xz}}{\partial z}. \tag{99}$$

البته این روابط با استفاده از نمایشِ چهاربعدیِ نسبیتی واضح‌تر خواهند بود. روشِ حلِ سیستماتیک از تحلیل‌برداریِ چهاربعدی و نظریه‌ی نسبیت بر پایه‌ی نظریه‌ی ماتریسی با ضربِ ناجابه‌جایی، جای دیگری ارائه خواهد شد.

§ 8. **امواجِ کروی. تابشِ دوقطبی.** برای رسیدن به هدفمان یعنی محاسبه‌ی تابشِ یک نوسان‌گر، اکنون باید امواجِ کروی را بررسی کنیم.

بدین‌منظور سه‌بردارِ هرتز را به صورتِ یک بردارِ ماتریسی معرفی می‌کنیم؛ از $\mathfrak{Z}$ برای ساختنِ $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{H}$ با روابطِ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathfrak{E} = \text{grad div}\, \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{Z}}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\ \text{rot}\, \dot{\mathfrak{Z}}. \tag{100}$$

در نظریه‌ی کلاسیکی برای یک موجِ کروی، $\mathfrak{Z}$ متناظر است با

$$\frac{1}{r}\ e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{r}{c}\right)}.$$

می‌دانیم می‌توان این عبارت را، بنا بر رابطه‌ی

$$\frac{e^{i\varkappa r}}{r} = \frac{i\varkappa}{2\pi}\int e^{t\varkappa(\mathfrak{r}\ \mathfrak{s})}\ d\boldsymbol{\omega}; \tag{101}$$

به صورتِ برهم‌نهیِ امواجِ تخت نوشت [1]، که در آن $\mathfrak{r}$ اندازه‌ی برداری است که از مرکزِ موجِ کروی تا نقطه‌اثرِ میدان کشیده شده است، و $\mathfrak{s}$ بردارِ یکه است؛ $d\boldsymbol{\omega} = d\mathfrak{s}_x d\mathfrak{s}_y d\mathfrak{s}_z$. بنابراین در نظریه‌ی ما از امواجِ تخت، که با ماتریس‌هایی به شکلِ (89) نمایش داده می‌شوند، می‌توان با انتگرال‌گیری روی جهت‌های عمود بر موج، نمایشِ موجِ کروی را به دست آورد:

[1] برای مثال رابطه‌ی 7 در

P. Debye, Ann. d. Phys. **80**, 755, 1909;

را ببینید.

$$\mathfrak{Z} = \left(e\mathfrak{q}(nm) \frac{e^{2\pi i \nu(nm)\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r} \right); \tag{102}$$

در این‌جا ماتریسِ $e\mathbf{q} = \big(e\mathfrak{q}(nm)\big)$ گشتاورِ الکتریکیِ برانگیخته توسطِ موج است.

محاسباتی که از این‌جا به تعیینِ میدانِ الکترومغناطیسی و تابش منجر می‌شوند همانندِ نظریه‌ی کلاسیکی هستند، زیرا $\mathfrak{r}$ همانندِ یک نرده‌ای با هر ماتریسِ برداری جابه‌جا می‌شود. این رابطه‌ی

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= -\frac{e}{c^2}\frac{1}{r^2}[\mathfrak{r}\ \ddot{\mathfrak{q}}], \\ \mathfrak{E} &= \ \ \frac{e}{c^2}\frac{1}{r^3}[\mathfrak{r}\ [\mathfrak{r}\ \ddot{\mathfrak{q}}]] \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

را می‌دهد و از آن نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathfrak{S} = -\frac{e}{4\pi c^3}\frac{\mathfrak{r}}{r}[\mathfrak{r}\ \ddot{\mathfrak{q}}]. \tag{104}$$

همانندِ نظریه‌ی کلاسیکی انتگرال روی همه‌ی جهت‌های فضائی گرفته می‌شود. نتیجه برای انرژیِ تابش‌شده در هر ثانیه به صورتِ زیر است:

$$\int \mathfrak{S}\ d\mathfrak{f} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ \ddot{\mathfrak{q}}^2. \tag{105}$$

برای به دست آوردنِ تابشِ میان‌گین باید از این عبارت روی زمان میان‌گین‌گیری کنیم؛ نتیجه به صورتِ ماتریسِ قطریِ زیر است:

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ \overline{\ddot{\mathfrak{q}}^2}. \tag{106}$$

اگر نوسان‌گر در یک جهتِ ثابت نوسان کند، می‌توانیم ماتریسِ برداریِ $\mathbf{q}$ را با ماتریسِ نرده‌ایِ $\boldsymbol{q} = \big(q(nm)\big)$ جای‌گزین کنیم؛ بنابراین تابش به صورتِ زیر است

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ \overline{\ddot{\boldsymbol{q}}^2} = \frac{32\pi^4 e^2}{3\,c^3}\Big(\sum_k \nu(nk)^4 |q(nk)|^2\Big). \tag{107}$$

هنوز نمی‌توانیم نظریه‌ی کاملی از تابش ارائه دهیم، به طوری که بشود از آن رابطه‌ی تبدیلِ هر یک از جملاتِ این دنباله به حالاتِ مانا را پیدا کرد، زیرا این نیاز به یک تحلیلِ دقیق از اثرِ واکنشِ تابش

رویِ نوسان‌گر، نظریه‌ی میرایی، دارد. به این موضوع بعداً می‌پردازیم. این‌جا تنها می خواهیم بررسی کنیم که آیا واقعاً گذار با مقادیرِ $|q(nk)|^2$ تعیین می‌شود؛ عبارتِ (107) نشان می‌دهد که این طور است، اما در عینِ حال، می‌بینیم که این کمیت همه‌ی تابشِ خودبه‌خودیِ گسیل‌شده از یک حالتِ مانا نیست، زیرا گذارهای خودبه‌خودی تنها به حالاتِ انرژیِ پایین‌تر، یا با شماره‌گذاریِ مناسب، به حالاتِ با اعدادِ کوانتومی کوچک‌تر، رخ می‌دهند. اکنون می‌توانیم به یک روشِ کاملاً صوری مشخص کنیم که چگونه این وضعیت در نظریه‌ی ما بیان می‌شود؛ ما نه میان‌گین، بلکه جمعِ قطریِ ماتریسِ تابشِ (105) را حساب می‌کنیم، که می‌دهد

$$D\Big(\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\overline{\ddot{\boldsymbol{q}}^2}\Big) = \frac{32\pi^4 e^2}{3c^3}\sum_{nk}\nu(nk)^4|q(nk)|^2. \tag{108}$$

می‌توانیم سمتِ راست را با تغییرِ جمع‌بندی به این صورت بنویسیم:

$$\frac{64\pi^4 e^2}{3\,c^3}\sum_{n}\Big(\sum_{k<n}\nu(nk)^4\cdot|q(nk)|^2\Big). \tag{109}$$

بدین ترتیب نگاشتِ موردِ نظر به دست می‌آید: به هر حالتِ n تابشی تعلق دارد که متناظر با گذار به همه‌ی حالت‌های $k<n$ است، که شدتِ هر یک از نظریه‌ی کلاسیکی معلوم است. این با تجربه سازگار است، اگر فرض کنیم که شاخص‌های n با انرژیِ فزاینده‌ی W_n مرتب شده‌اند.

پس فرضِ هایزنبرگ به شکلِ محدودی که در بالا مشخص شد توجیه می‌شود.

هم چنین در این‌جا باید تاکید کنیم که این استنباط در موردِ احتمالِ گذار مستقل از شرطِ ناتبه‌گنیِ سیستم، یعنی اختلافِ W_n ها، است. در نهایت تاکید می‌کنیم که با احتمالاتِ گذار وزن‌هایِ آماریِ حالت‌ها نیز مشخص می‌شوند، و در واقع برای هر حالتِ متناظر با یک سطر و ستون یا یک عنصرِ قطریِ $\boldsymbol{W}$، وزن آماریِ یک‌سانی را باید نسبت داد. این نتیجه (در تعمیم به حالت‌های با چند درجه‌ی آزادی) به تنهایی به اصلِ کلیِ آمارِ کوانتومیِ بوز–اینشتین برای نور منجر می‌شود، که هدفِ بعدی است.

نکته‌ی اضافه‌شده در تصحیح. تعمیمِ نظریه به چندین درجه‌ی آزادی در این مدت همراه با آقای و. هایزنبرگ تکمیل شد و به دنبالِ این کار خواهد آمد. در آن‌جا موضوعاتِ گوناگونی که در این‌جا فقط به آن‌ها اشاره شده، و در این مدت روشن‌تر شدند، با جزییاتِ بیشتر تشریح می‌شود.