

یادداشتی بر شکل یک قطره روی سطح تخت افقی III

زینب محمدی، امیرحسین فتح‌اللهی

چکیده: شکل یک قطره‌ی مایع روی یک سطح تخت افقی، در حالتی که زاویه‌ی تماس بین مایع و سطح کوچک‌تر از 90° است، به وسیله‌ی حل از نوع سری مطالعه شده است.

0 مقدمه

در نقطه‌ی تماس مایع با جامد، دو سطح با هم زاویه‌ای می‌سازند که فقط با کشش سطحی مایع σ و چسبندگی مایع به سطح γ تعیین می‌شود؛ اگر η زاویه‌ی تماس باشد داریم:

$$\cos \eta = 1 - \frac{\gamma}{\sigma} \quad (1)$$

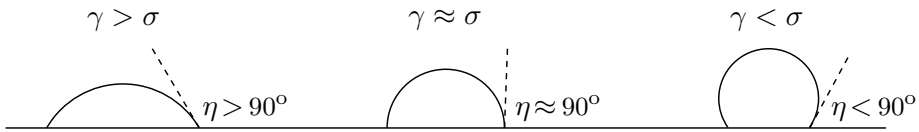
حالت‌های مختلفی که زاویه‌ی تماس می‌تواند بگیرد در شکل 1 رسم شده است. در حالت $\sigma \ll |\gamma|$ قطره کم‌ترین تماس را با سطح دارد، و در $\gamma \geq 2\sigma$ قطره روی سطح کاملاً پهن می‌شود.

در [1] شکل یک قطره‌ی بی‌وزن یا سبک و در [2] حل از روش سری برای حالت $\eta > 90^\circ$ برای یک سطح تخت و افقی مورد بررسی قرار گرفت. در این یادداشت به سراغ حالت $\eta < 90^\circ$ با استفاده از روش سری می‌رویم. در این حالت چون به ازای یک شعاع دو ارتفاع وجود دارد باید برای نیمه‌ی بالائی و پائینی سطح قطره دو تابع جداگانه فرض کرد و سپس با شرایط مناسب این دو تابع را به هم چسباند.

شکل یک قطره از مایع روی سطح جامد به وسیله‌ی این کمیت‌ها تعیین می‌شود: (۱) کشش سطحی مایع، (۲) چسبندگی مایع به سطح، و (۳) به واسطه‌ی نیروی وزن، حجم قطره. اگر Δp اختلاف فشار بیرون و داخل روی هر نقطه از سطح مایع باشد، داریم:

$$\Delta p = \pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

که به رابطه‌ی پوآسون معروف است، و در آن $R_{1,2}$ دو شعاع انحنای عمود بر هم سطح هست‌اند. در قراردادی که ما کار می‌کنیم، Δp فشار بیرون منهای فشار داخل است، و $(-)$ برای وقتی است که علامت مؤلفه‌ی



شکل ۱: سه شکل مختلف قطره‌ی مایع روی سطح جامد

سوم بردار یکه‌ای که عمود به سطح مایع و به طرف خارج مایع است مثبت (منفی) باشد. مثلاً اگر قطره شکلی کروی داشته باشد، برای نیم کره‌ی بالائی + و برای نیم کره‌ی پائینی - انتخاب می‌شود. به طور کلی برای قطره‌های محدب، در همه‌ی نقاط $\Delta p < 0$ است.

شعاع‌انحنای اصلی را می‌توان بر حسب معادله‌ی سطح نوشت، و با احتساب اختلاف فشار، که انتظار می‌رود از هیدروستاتیک بیاید، معادله‌ی پواسون یک معادله‌ی دیفرانسیل برای سطح می‌دهد، که در صورت حل کردن، شکل سطح به دست می‌آید [1].

مانند [1] و [2] حالتی را در نظر می‌گیریم که قطره حول محور z تقارن دارد. با توجه به شکل فرض می‌شود $z = f(x, y) = f(\rho)$ ؛ برای معرفی مختصات به شکل 2 مراجعه شود. در این صورت می‌توان دید [1]:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{f_{\rho\rho} + \frac{f_\rho}{\rho} (1 + f_\rho^2)}{(1 + f_\rho^2)^{3/2}} \quad (3)$$

که در آن $f_\rho = \frac{df}{d\rho}$ و $f_{\rho\rho} = \frac{d^2f}{d\rho^2}$. با تعریف $\psi(\rho) = \frac{f_\rho}{\sqrt{1 + f_\rho^2}}$ داریم

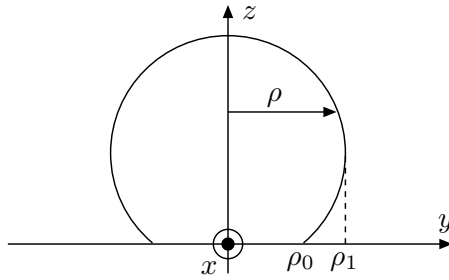
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \psi_\rho + \frac{\psi}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\psi) \quad (4)$$

در نتیجه رابطه‌ی پواسون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta p = \pm \sigma \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\psi) \right) = \pm \frac{\sigma}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{f_\rho}{\sqrt{1 + f_\rho^2}} \right) \quad (5)$$

با وجود وزن اختلاف فشار را می‌شود به صورت $\Delta p(z) = \Delta p_0 + \mu gz = \Delta p_0 + \mu g f(\rho)$ نوشت که در آن μ چگالی مایع و Δp_0 یک مقدار ثابت است که باید تعیین شود. پس داریم:

$$\pm \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\psi) = \pm \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{f_\rho}{\sqrt{1 + f_\rho^2}} \right) = \frac{\Delta p_0 + \mu g f(\rho)}{\sigma} \quad (6)$$



شکل ۲: تعریف مختصات و پارامترها

که با تعریف $2\kappa = \frac{\Delta p_0}{\sigma}$ به دست می‌آوریم:

$$\pm \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{f_\rho}{\sqrt{1+f_\rho^2}} \right) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\rho) \quad (7)$$

با حل این معادله $f(\rho)$ به دست می‌آید.

1 حل به روش سری برای $\eta < 90^\circ$

می‌خواهیم معادله دیفرانسیل (7) را حل کنیم. در آن σ , g , μ را می‌دانیم و مجهول‌ها κ , ρ_0 , ρ_1 ، و تابع $f(\rho)$ هستند. هم‌چنین حجم قطره V نیز دانسته فرض می‌شود. همان‌طور که قبلاً اشاره شد $\Delta p_0 < 0$ ، و بنابراین $\kappa < 0$ است.

معادله‌ی سطح قطره را نمی‌شود با یک تابع بیان کرد چون برای $\rho > \rho_0$ دو مقدار برای f داریم؛ شکل قبل. قسمت بالای $\rho = \rho_1$ را با f_+ و قسمت پائینی را با f_- نشان می‌دهیم. بنابراین مسئله یافتن f_+ و f_- است. تعدادی شرط مرزی هم داریم. f باید یک تابع پیوسته باشد؛ به ازای $\rho = \rho_0$ صفر شود؛ مشتق f باید در $\rho = \rho_0$ برابر با $\tan \eta$ و در بالاترین نقطه‌ی قطره یعنی $\rho = 0$ صفر شود. این شرایط به صورت

زیر ارائه می‌شوند:

$$f_+(\rho = \rho_1) = f_-(\rho = \rho_1) \quad (8)$$

$$f_-(\rho = \rho_0) = 0 \quad (9)$$

$$f_{-\rho}(\rho = \rho_0) = \tan \eta \quad (10)$$

$$f_{+\rho}(\rho = 0) = 0 \quad (11)$$

هم‌چنین می‌دانیم حجم قطره به صورت زیر حساب می‌شود

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{\rho_0} \rho f_+ d\rho + \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho (f_+ - f_-) d\rho = \int_0^{\rho_1} \rho f_+ d\rho - \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho f_- d\rho \quad (12)$$

f باید یک تابع زوج و خوش‌رفتار از ρ باشد و مشتق آن در $\rho = \rho_1$ به بی‌نهایت میل کند. در [1] نشان داده شد برای وقتی که اثر وزن را بشود کنار گذاشت سطح قطره قسمتی از یک کره خواهد بود:

$$z = f_{\pm}^{g=0}(\rho) = z_0 \pm \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} \quad (13)$$

که در آن z_0 مکان مرکز کره است، که برای آن داریم: $z_0 = \rho_1 \cos \eta$. هم‌چنین $\kappa = -\rho_1^{-1}$ به دست می‌آید. که با دانستن حجم قطره تعیین می‌شود [1]. می‌توان نشان داد که رفتار تابع در $\rho \approx \rho_1$ مانند حل کره خواهد بود. (7) را می‌توان به این شکل نوشت

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{f_\rho}{|f_\rho|} \left(1 + \frac{1}{f_\rho^2} \right)^{-1/2} \right) &= 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\rho) \\ -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \left(1 + \frac{1}{f_\rho^2} \right)^{-1/2} \right) &= 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\rho) \end{aligned} \quad (14)$$

که با توجه به علامت مشتق در نیمه‌ی بالائی و پائینی، معادله‌ی بالا برای هر دوی f_{\pm} برقرار است. می‌دانیم در $\rho \approx \rho_1$ داریم $|f_{\pm\rho}| \gg 1$ ، که با جاگذاری در بالا می‌دهد

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \left(1 - \frac{1}{2f_\rho^2} \right) \right) &\approx 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\rho) \\ -\left[\frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{2f_\rho^2} \right) + \frac{f_{\rho\rho}}{f_\rho^3} \right] &\approx 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\rho) \end{aligned} \quad (15)$$

اگرچه مشتق تابع در نزدیکی ρ_1 به بی‌نهایت می‌رود، ولی خود تابع محدود است. فرض می‌کنیم تابع در نزدیکی ρ_1 رفتاری شبیه زیر داشته باشد:

$$\rho \approx \rho_1 : f_{\pm}(\rho) \approx c_{\pm} + \lambda_{\pm}(\rho_1 - \rho)^\alpha, \quad (16)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ تا با مشتق‌گیری در $\rho = \rho_1$ به بی‌نهایت برود. هم‌چنین از شرط چسبیدن دو جوابِ بالا و پائین در ρ_1 داریم $c_+ = c_- = c$. پس از مشتق‌گیری و جاگنداری، حول $\rho = \rho_1$ داریم

$$-\frac{1}{\rho_1} + \frac{(\rho_1 - \rho)^{-2\alpha+2}}{2\rho_1\lambda^2\alpha^2} + \frac{\alpha - 1}{\lambda^2\alpha^2}(\rho_1 - \rho)^{-2\alpha+1} \approx 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma}(\lambda(\rho_1 - \rho)^\alpha + c) \quad (17)$$

از توانِ جمله‌ی سوم سمتِ چپ داریم $0 < \alpha \leq 1/2$. تنها دو امکان می‌ماند: (۱) تساوی توان‌های $-2\alpha + 1$ و α در دو طرف، که می‌دهد $\alpha = 1/3$ (۲) گرفتن $\alpha = 1/2$ برای حذفِ کوچک‌ترین توانِ ظاهرشده در معادله. حالتِ اول قابل‌قبول نیست چون برای λ در هر دو نیمه مقدار منفی می‌دهد

$$\left. \frac{\alpha - 1}{\lambda^2\alpha^2} \right|_{\alpha=1/3} = \frac{\mu g}{\sigma}\lambda \Rightarrow \lambda^3 < 0$$

که با علامتِ مشتق در نیمه‌ی بالائی ناسازگار است. پس فقط حالتِ دوم می‌ماند، یعنی $\alpha = 1/2$. در این صورت داریم:

$$-\frac{1}{\rho_1} - \frac{2}{\lambda^2} = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma}c$$

که یک معادله برای λ است با ریشه‌های $\lambda_+ = -\lambda_- > 0$ در (16)؛ علامت‌ها طوری اختیارشده تا شیبِ نیمه‌ی بالائی و پائینی درست در بیاید. برای حلِ کروی بی‌وزن داریم $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2\rho_1}$ که در معادله‌ی اخیر با $g = 0$ و شرط قبلی $\kappa = -\rho_1^{-1}$ سازگار است. معادله‌ی اخیر و ریشه‌هایش به شکل $\lambda_+ = -\lambda_- > 0$ چیزهائی هستند که در به دست آوردنِ حل‌های چند جمله‌ای نیز بعداً خواهیم دید.

با توجه به زوج‌بودنِ $f(\rho)$ می‌شود آن را برحسبِ توان‌های $\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}$ نیز بسط داد. بهتر است همه

چیز را برحسبِ متغیر جدیدِ τ بنویسیم:

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}, \quad \rho = \sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}, \quad -\rho d\rho = \tau d\tau \\ \frac{d}{d\rho} &= \frac{d\tau}{d\rho} \frac{d}{d\tau} = -\frac{\rho}{\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}} \frac{d}{d\tau} = -\frac{\rho}{\tau} \frac{d}{d\tau} = -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\tau} \frac{d}{d\tau} \\ f_\rho &= -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\tau} \frac{df}{d\tau} = -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\tau} f_\tau \end{aligned} \quad (18)$$

معادله‌دیفرانسیل به صورتِ زیر در می‌آید:

$$\pm \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(\rho_1^2 - \tau^2)f_\tau}{\tau \sqrt{1 + \frac{(\rho_1^2 - \tau^2)}{\tau^2} f_\tau^2}} \right) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\tau)$$

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(\rho_1^2 - \tau^2) f_\tau}{\tau \frac{\sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\tau} |f_\tau| \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2) f_\tau^2}}} \right) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\tau) \\
& \pm \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\pm \sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2) f_\tau^2}}} \right) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\tau) \\
& \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2) f_\tau^2}}} \right) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f(\tau) \tag{19}
\end{aligned}$$

این معادله برای هر دو نیمه درست است. با یک بار انتگرال‌گیری داریم:

$$\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \tau^2}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2) f_\tau^2}}} - \rho_1 = \kappa \tau^2 + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^\tau \tau' f(\tau') d\tau' \tag{20}$$

که باز هم f_+ و f_- هر دو در این معادله صدق می‌کنند.

ضرایب بسط را برای نیمه‌ی بالائی a_n و برای نیمه‌ی پائینی b_n می‌گیریم

$$f_+(\tau) = \sum_{n=0}^k a_n \tau^n, \quad f_-(\tau) = \sum_{n=0}^k b_n \tau^n \tag{21}$$

از آنجا که می‌خواهیم چه‌گونه‌گی پیداشدن روابط بازگشتی بین ضرایب حل سری را با اضافه‌شدن تعداد جملات، که به معنی به‌ترشدن تقریب است، نشان دهیم، تعداد جملات را محدود و حد جمع را k گرفته‌ایم.

شرایط (8) تا (11) به این شکل در می‌آیند

$$\rho = \rho_1 \Rightarrow \tau = 0 : a_0 = b_0 =: \beta \tag{22}$$

$$\rho = \rho_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^k b_n (\rho_1^2 - \rho_0^2)^{n/2} = 0 \tag{23}$$

$$f_{-\rho}(\rho_0) = \tan \eta \Rightarrow \sum_{n=0}^k n b_n (\rho_1^2 - \rho_0^2)^{(n-1)/2} = -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}}{\rho_0} \tan \eta \tag{24}$$

$$f_{+\rho}(0) = 0 \Rightarrow f_{+\rho}(0) = -\frac{0}{\rho_1} f_{+\tau}(\rho_1) = 0 \tag{25}$$

از میان بالائی‌ها با زوج فرض کردن تابع f ، شرط آخر هم‌واره برقرار است و معادله‌ی جدیدی نمی‌دهد.

همچنین، مانند [2] می‌توان با انتگرال از معادله دیفرانسیل روی تمام دامنه‌هایی که تابع‌ها تعریف شده‌اند شرط‌های جدیدی به دست آورد. از (20) برای $\tau = \rho_1$ و نیمه‌ی بالائی داریم

$$\left. \frac{(\rho_1^2 - \tau^2)}{\sqrt{(\rho_1^2 - \tau^2) + \frac{\tau^2}{f_{+\tau}}}} \right|_{\tau=\rho_1} - \rho_1 = \kappa \rho_1^2 + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^{\rho_1} \tau f_{+} d\tau$$

$$- \rho_1 = \kappa \rho_1^2 + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^{\rho_1} \tau f_{+} d\tau \quad (26)$$

برای نیمه‌ی پائینی با انتخاب $\tau = \sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}$ در (20) داریم

$$\frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \frac{(\rho_1^2 - \rho_0^2)}{\rho_0^2 f_{-\tau}^2 (\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2})}}} - \rho_1 = \kappa(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}} \tau f_{-} d\tau$$

$$\frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \eta}}} - \rho_1 = \kappa(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}} \tau f_{-} d\tau$$

$$\rho_0 \sin \eta - \rho_1 = \kappa(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}} \tau f_{-} d\tau \quad (27)$$

وقتی توابع از درجه‌ی k در τ برای تابع‌ها فرض می‌شوند، تعداد $2(k+1)$ مجهول برای ثابت‌های a_0 تا a_k و همچنین b_0 تا b_k وجود دارد. با احتساب مقدارهای مجهول κ ، ρ_1 ، و ρ_0 تعداد مجهولات می‌شود $2k+5$. مانند [2]، از معادله دیفرانسیل برای نیمه‌های بالائی و پائینی $2k$ معادله به دست می‌آید، که با پنج شرط (22)، (23)، (24)، (26)، و (27) برای پیدا کردن مجهولات کافی هستند.

مانند [2] می‌توان یک معادله‌ی دقیق به دست آورد تا به وسیله‌ی آن دقت حل به دست آمده از روش سری را برآورد کرد. اگر (27) را از (26) کم کنیم از (12) داریم

$$-\rho_0 \sin \eta = \kappa \rho_0^2 + \frac{\mu g V}{2\pi \sigma} \quad (28)$$

اگر چه این رابطه جدید نیست، ولی دقیق است، و می‌توان برای برآورد خطا از آن استفاده کرد. طبیعی است به دلخواه می‌توان این رابطه‌ی آخر را به عنوان یکی از شرط‌ها استفاده کرد، و در عوض یکی از شرط‌های قبلی را برای برآورد خطا استفاده به کار برد.

1.1 : دو جمله‌ای $k = 1$

در این حالت، $f_-(\tau) = b_0 + b_1\tau$ و $f_+(\tau) = a_0 + a_1\tau$ ، هفت مجهول داریم: $\kappa, b_1, b_0, a_1, a_0$. از شرط‌های (22)، (23)، (24)، (26)، و (27) به دست می‌آوریم:

$$a_0 = b_0 = \beta, \quad \beta + b_1\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2} = 0, \quad b_1 = -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}}{\rho_0} \tan \eta, \quad (29)$$

$$-\rho_1 = \kappa\rho_1^2 + \frac{\mu g}{\sigma} \left(\frac{1}{2}\beta\rho_1^2 + \frac{1}{3}a_1\rho_1^3 \right) \quad (30)$$

$$\rho_0 \sin \eta - \rho_1 = \kappa(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\mu g}{\sigma} \left(\frac{1}{2}\beta(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{1}{3}b_1(\rho_1^2 - \rho_0^2)^{3/2} \right) \quad (31)$$

با استفاده از (20) برای نیمه‌ی بالائی داریم ($f_+ = a_1$)

$$\frac{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2)a_1^2}}} - \rho_1 = \left[\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma}\beta \right] \tau^2 + \frac{\mu g}{3\sigma} a_1 \tau^3$$

که پس از بسطِ طرفِ چپِ حولِ $\tau = 0$ به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2)a_1^2}}} - \rho_1 &= \rho_1 \left(1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{\tau^2}{a_1^2 \rho_1^2 (1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2})} \right]^{-1/2} - \rho_1 \\ &\approx \rho_1 \left(1 - \frac{\tau^2}{2\rho_1^2} \right) \left[1 - \frac{\tau^2}{2a_1^2 \rho_1^2} \left(1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2} \right)^{-1} \right] - \rho_1 \\ &\approx -\frac{\tau^2}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) \end{aligned}$$

با مقایسه با طرفِ دیگر داریم:

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma}\beta = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) \quad (32)$$

چون هر دو نیمه در معادله‌ی (20) صدق می‌کنند به دست می‌آوریم:

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma}\beta = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{b_1^2} \right) \quad (33)$$

که می‌دهد $a_1^2 = b_1^2$ که با توجه به علامت مشتق‌های f_+ و f_- می‌دهد $a_1 = -b_1 > 0$. در واقع (32) و (33) همان معادله‌ای هستند که برای λ به دست آوردیم. به علاوه رابطه‌ی بین a_1 و b_1 شرطِ قبلی $\lambda_+ = -\lambda_- > 0$ است. با استفاده از معادلات بالا داریم:

$$a_1 = -b_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}}{\rho_0} \tan \eta, \quad \beta = \frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{\rho_0} \tan \eta \quad (34)$$

و

$$-\rho_1 = -\frac{\rho_1}{2} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) + \frac{\mu g}{3\sigma} a_1 \rho_1^3 \quad (35)$$

$$\rho_0 \sin \eta - \rho_1 = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) (\rho_1^2 - \rho_0^2) - \frac{\mu g}{3\sigma} a_1 (\rho_1^2 - \rho_0^2)^{3/2} \quad (36)$$

که در دو تاییِ آخری فقط ρ_0 و ρ_1 مجهول هستند، که در مسئله‌ی واقعی می‌توان با استفاده از روشِ عددی حل‌شان کرد. در موردِ دقتِ این جواب می‌توان با استفاده از حلِ دقیقِ کروی بدونِ وزن که قبلاً گفته شد بحث کرد. در واقع با فرض $g = 0$ معادلات دارای جواب‌های زیر هستند [1]:

$$\kappa = -\rho_1^{-1}, \quad a_1 = -b_1 = 1, \quad \rho_0 = \rho_1 \sin \eta,$$

$$\rho_1 = \left[\frac{3V}{\pi(2 - \cos \eta)(1 + \cos \eta)^2} \right]^{1/3} \quad (37)$$

با این حساب و با توجه به (28) این حل خوب است اگر $\mu g V / \sigma \ll \rho_0 \sin \eta \approx -\kappa \rho_0^2$.

1.2 سه‌جمله‌ای: $k = 2$

در این حالت، $f_+(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2$ و $f_-(\tau) = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2$. باز هم داریم $a_0 = b_0 = \beta$. دیگر شرط‌ها می‌دهند:

$$\beta + b_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2} + b_2(\rho_1^2 - \rho_0^2) = 0 \quad (38)$$

$$b_1 + 2b_2 \sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2} = -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}}{\rho_0} \tan \eta \quad (39)$$

$$-\rho_1 = \kappa \rho_1^2 + \frac{\mu g \rho_1^2}{\sigma} \left(\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{3} a_1 \rho_1 + \frac{1}{4} a_2 \rho_1^2 \right) \quad (40)$$

$$\rho_0 \sin \eta - \rho_1 = \kappa(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\mu g}{\sigma} \left(\frac{1}{2} \beta(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{1}{3} b_1(\rho_1^2 - \rho_0^2)^{3/2} + \frac{1}{4} b_2(\rho_1^2 - \rho_0^2)^2 \right) \quad (41)$$

از (20) برای نیمه‌ی بالائی داریم:

$$\frac{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2)[a_1 + 2a_2\tau]^2}}} - \rho_1 = \left[\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma} \beta \right] \tau^2 + \frac{\mu g}{3\sigma} a_1 \tau^3 + \frac{\mu g}{4\sigma} a_2 \tau^4$$

با بسطِ طرفِ چپِ حولِ $\tau = 0$ به دست می‌آید

$$\frac{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2)[a_1 + 2a_2\tau]^2}}} - \rho_1 \approx -\frac{\tau^2}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) + \frac{2a_2\tau^3}{a_1^3\rho_1} \quad (42)$$

از مساوی قرار دادنِ جمله‌هایِ هم‌توانِ دو طرف، دو معادله به دست می‌آید

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma} \beta = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) \quad (43)$$

$$\frac{\mu g}{3\sigma} a_1 = \frac{2a_2}{a_1^3\rho_1} \quad (44)$$

که اولی را از قسمت قبل هم داشتیم. برای نیمه‌ی پائینی به طور مشابه به دست می‌آید

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma} \beta = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{b_1^2} \right) \quad (45)$$

$$\frac{\mu g}{3\sigma} b_1 = \frac{2b_2}{b_1^3\rho_1} \quad (46)$$

که دوباره می‌دهد $a_1^2 = b_1^2$ و همچنین $a_2 = b_2$. با بررسی علامتِ شیبِ بالا و پائینِ حولِ $\tau = 0$ ، دوباره نتیجه می‌گیریم $a_1 = -b_1 > 0$. مجدداً نه مجهول و نه معادله داریم که می‌توان عددی حل کرد. رابطه‌ی (28) هم می‌تواند برآوردِ خطا کند.

1.3 $k = 3$: چهارجمله‌ای

در این حالت، $f_+(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$ و $f_-(\tau) = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3$. باز

هم داریم $\beta = b_0 = a_0$. دیگر شرطها می دهند

$$\beta + b_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2} + b_2(\rho_1^2 - \rho_0^2) + b_3(\rho_1^2 - \rho_0^2)^{3/2} = 0 \quad (47)$$

$$b_1 + 2b_2 \sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2} + 3b_3(\rho_1^2 - \rho_0^2) = -\frac{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2}}{\rho_0} \tan \eta \quad (48)$$

$$-\rho_1 = \kappa \rho_1^2 + \frac{\mu g \rho_1^2}{\sigma} \left(\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{3} a_1 \rho_1 + \frac{1}{4} a_2 \rho_1^2 + \frac{1}{5} a_3 \rho_1^3 \right) \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \sin \eta - \rho_1 = \kappa(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\mu g}{\sigma} \left(\frac{1}{2} \beta(\rho_1^2 - \rho_0^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} b_1(\rho_1^2 - \rho_0^2)^{3/2} + \frac{1}{4} b_2(\rho_1^2 - \rho_0^2)^2 + \frac{1}{5} b_3(\rho_1^2 - \rho_0^2)^{5/2} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

از (20) برای نیمه‌ی بالائی داریم:

$$\frac{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2) f_{+\tau}^2}}} - \rho_1 \approx \left[\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma} \beta \right] \tau^2 + \frac{\mu g}{3\sigma} a_1 \tau^3 + \frac{\mu g}{4\sigma} a_2 \tau^4 \quad (51)$$

با بسط طرف چپ حول $\tau = 0$ به دست می آید

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{(\rho_1^2 - \tau^2)[a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2]^2}}} - \rho_1 \approx -\frac{\tau^2}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) + \frac{2a_2\tau^3}{a_1^3\rho_1} \\ - \frac{\tau^4}{8\rho_1^4} \left(1 + \frac{2}{a_1^2} - \frac{3}{a_1^4} - \frac{24a_3}{a_1^3} \rho_1^2 + \frac{48a_2^2}{a_1^4} \rho_1^2 \right) \end{aligned} \quad (52)$$

با مقایسه‌ی دو طرف به دست می آوریم

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma} \beta = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{a_1^2} \right) \quad (53)$$

$$\frac{\mu g}{3\sigma} a_1 = \frac{2a_2}{a_1^3 \rho_1} \quad (54)$$

$$\frac{\mu g}{4\sigma} a_2 = -\frac{1}{8\rho_1^4} \left(1 + \frac{2}{a_1^2} - \frac{3}{a_1^4} - \frac{24a_3}{a_1^3} \rho_1^2 + \frac{48a_2^2}{a_1^4} \rho_1^2 \right) \quad (55)$$

به همین ترتیب برای نیمه‌ی پائینی داریم:

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\sigma} \beta = -\frac{1}{2\rho_1} \left(1 + \frac{1}{b_1^2}\right) \quad (56)$$

$$\frac{\mu g}{3\sigma} b_1 = \frac{2b_2}{b_1^3 \rho_1} \quad (57)$$

$$\frac{\mu g}{4\sigma} b_2 = -\frac{1}{8\rho_1^4} \left(1 + \frac{2}{b_1^2} - \frac{3}{b_1^4} - \frac{24b_3}{b_1^3} \rho_1^2 + \frac{48b_2^2}{b_1^4} \rho_1^2\right) \quad (58)$$

دوباره می‌بینیم $b_1^2 = a_1^2$ و $a_2 = b_2$ و هم چنین $\frac{a_3}{a_1^3} = \frac{b_3}{b_1^3}$. با بررسی علامت شیب بالا و پائین حول $\tau = 0$ ، دوباره نتیجه می‌گیریم $a_1 = -b_1 > 0$ ، که نتیجه می‌دهد $a_3 = -b_3$. مجدداً یازده مجهول و یازده معادله داریم که می‌توان عددی حل کرد. رابطه‌ی (28) هم می‌تواند برآورد خطا کند.

2 نتیجه‌گیری

در این یادداشت شکل یک قطره روی سطح تخت افقی برای وقتی که زاویه‌ی مایع با سطح حادّه است مورد بررسی قرار گرفت. معادلاتی که برای ضرایب سری پیدا می‌شوند طوری هستند که می‌توان به وسیله‌ی روش عددی حل شوند.

با آن چه که در بالا آمد می‌توان حدس زد:

$$a_{2n} = b_{2n}, \quad a_{2n+1} = -b_{2n+1} \quad (59)$$

در واقع می‌توان این موضوع را به طور کلی اثبات کرد. ابتدا (20) را به این صورت بنویسیم:

$$\rho_1 \frac{1 - \tau^2 / \rho_1^2}{\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\rho_1^2} \left(1 - \frac{1}{f_\tau^2}\right)}} - \rho_1 = \kappa \tau^2 + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^\tau \tau' f(\tau') d\tau' \quad (60)$$

برای راحتی در این مرحله ρ_1 را 1 می‌گیریم. در این صورت برای نیمه‌ی بالائی داریم

$$\frac{1 - \tau^2}{\left[1 - \tau^2 \left(1 - a_1^{-2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n' \tau^{n-1}\right]^{-2}\right)\right]^{1/2}} = \kappa \tau^2 + \frac{\mu g}{\sigma} \int_0^\tau \tau' f(\tau') d\tau' \quad (61)$$

که در آن $a_n' = a_n / a_1$ برای $n = 1, 2, \dots$ ($a_1' = 1$). شبیه همین معادله برای نیمه‌ی پائینی هم درست است که در آن a ها با b ها جای‌گزین می‌شوند. حال در بسط طرف چپ، توان‌های τ که از غیر از سری می‌آیند زوج یا فرد بودن توان را عوض نمی‌کنند، چون از نوع $(\tau^2)^m$ هستند. هم‌چنین توجه کنید که در

سری ضریبِ توانِ زوج از τ ، a' با شاخصِ فرد است، و توانِ فرد از τ ، a' با شاخصِ زوج. پس زوج یا فرد بودنِ توانِ τ در بسطِ طرفِ چپ را تعدادِ a' ها با شاخصِ زوج تعیین می‌کنند. به ساده‌گی می‌توان دید که جملاتِ توان‌های زوج τ در طرفِ چپ حتماً شاملِ تعدادِ زوج از a' با شاخصِ زوج‌اند، و جملاتِ توان‌های فرد τ شاملِ تعدادِ فرد از a' با شاخصِ زوج‌اند. همین برای بسطِ نیمه‌ی پائین و b' ها درست است. با توجه به این که

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = -b_1, \quad (62)$$

و از روابطِ مشابه بازگشتی که برای ضرایبِ بسطِ نیمه‌ی بالائی و پائینی پیدا می‌شود رابطه‌های (59) نتیجه می‌شوند.

قدردانی: از محمدِ خرّمی برای راه‌نمایی‌هایش ممنون‌یم.

یادداشت‌ها و مراجع

- [1] ا. ح. فتح‌اللهی، یادداشتی بر شکلِ یک قطره رویِ سطحِ تختِ افقی، گاما ۸، ص. 30.
- [2] ا. ح. فتح‌اللهی، یادداشتی بر شکلِ یک قطره رویِ سطحِ تختِ افقی II، گاما ۱۵، ص. 14.