

شرایطِ جداشدنِ ذره‌ای متحرک از رویه‌ای بدون اصطکاک

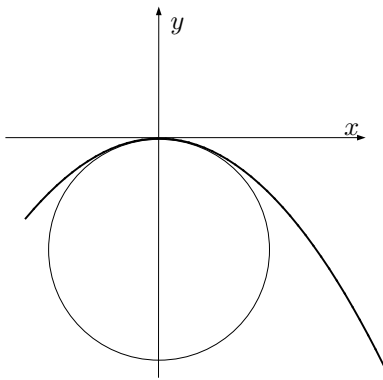
امیر آقامحمدی

ذره‌ای مماس بر رویه‌ای پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بررسی کنیم به ازای چه شرایطی ذره از رویه جدا می‌شود. ابتدا مسئله را برای رویه‌ای دلخواه با سطح مقطعی با معادله‌ی $y = f(x)$ مطالعه و شرطِ جداشدن ذره از رویه را به دست می‌آوریم. سپس به عنوان مثال رویه‌هایی با معادله‌ی $y = -\alpha x^k$, ($\alpha, k > 0$) را با تفصیل بیشتر بررسی می‌کنیم.

۳ مقدمه

ذره‌ای از بالای نیم کره‌ای به شعاع R با سرعت اولیه‌ای مماس بر سطح پرتاب می‌شود. اگر از اصطکاک بین ذره و رویه چشم‌پوشی کنیم و سرعت اولیه‌ی ذره بزرگ‌تر یا مساوی \sqrt{Rg} باشد ذره در همان ابتدا از سطح نیم کره جدا می‌شود. اگر سرعت اولیه‌ی آن کوچک‌تر از این مقدار حدی باشد، حتماً کمی بعدتر ذره در نقطه‌ای از سطح جدا می‌شود. این مسئله یکی از مسائل استاندارد و نسبتاً ساده‌ی مکانیک است که معمولاً در درس‌های مکانیک مقدماتی بررسی می‌شود. کاری که ما می‌خواهیم بکنیم بررسی کلی‌ی این مسئله است، یعنی رویه‌ای دلخواه در نظر می‌گیریم. ذره‌ای مماس بر رویه پرتاب می‌شود. برای چه رویه‌هایی ذره در همان ابتدا از سطح جدا می‌شود، یا برای کدام‌ها از رویه جدا نمی‌شود. خواهیم دید برای بعضی از رویه‌ها به ازای هیچ سرعت اولیه‌ی محدودی، هر چه قدر بزرگ هم باشد، ذره همان ابتدا از سطح جدا نمی‌شود، اما به ازای هر سرعت اولیه‌ای، هر چه قدر هم کوچک، حتماً مکانی وجود دارد که بعداً از رویه جدا شود. اگر ذره‌ای از قله‌ی رویه‌ای به شکل سهمی پرتاب شود، یا سرعت اولیه‌ی آن از مقدار حدی‌ای بزرگ‌تر است که همان ابتدا از سطح جدا می‌شود، یا آن که هرگز سطح را ترک نمی‌کند. رویه‌هایی هم وجود دارند که به ازای هیچ سرعت اولیه‌ای نه همان ابتدا جدا می‌شوند و نه هیچ زمان دیگری.

۴ شرایطِ جدا شدنِ ذره‌ای متحرک از رویه‌ای با مقطع سهمی



بیا باید در ابتدا رویه‌ای که سطح مقطع آن سهمی‌ای با معادله‌ی $y = -ax^2$ است، را در نظر بگیریم. از اصطکاکِ بین ذره و رویه چشم‌پوشی می‌کنیم. ذره‌ای با سرعتِ اولیه‌ی $v_0 \mathbf{i}$ ، ($v_0 > 0$)، مماس بر رویه از مبدأ پرتاب می‌شود. v_0 چه قدر باشد تا ذره در همان ابتدا از سهمی جدا شود؟ نیروهای وارد بر ذره، وزن آن mg ، و نیروی عمودیِ سطح N است. سهمی در نزدیکیِ مبدأ بخشی از دایره است و برای آن که ذره روی سهمی حرکت کند نیروی برآیند باید بتواند نیروی جانب‌مرکز لازم را تأمین کند.

ابتدا باید شعاع این دایره R را به دست آوریم. مطابق شکل دایره‌ای در مبدأ مماس بر این سهمی در نظر می‌گیریم به طوری که مشتق دوم دایره و سهمی در مبدأ برابر باشند. در این صورت می‌گوییم شعاع انحنای دو منحنی یکی است.

معادله‌ی دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد و مرکزش روی محور y است عبارت است از

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2. \quad (1)$$

در هم‌سایگیِ مبدأ معادله‌ی این دایره عبارت است از

$$\begin{aligned} y &= -R + \sqrt{R^2 - x^2} \approx -R + R \left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right) \\ &\approx -\frac{x^2}{2R}. \end{aligned} \quad (2)$$

از برابر قرار دادن این معادله با معادله‌ی سهمی شعاع انحنای سهمی در مبدأ به دست می‌آید

$$R = \frac{1}{2\alpha}. \quad (3)$$

قانون نیوتن برای ذره‌ای که در نزدیکیِ مبدأ روی سهمی حرکت می‌کند عبارت است از

$$mg - N = \frac{mv_0^2}{R} = 2\alpha mv_0^2, \quad \Rightarrow \quad N = m(g - 2\alpha v_0^2) \quad (4)$$

اگر $v_0 > v_c := \sqrt{\frac{g}{2\alpha}}$ باشد، ذره در همان ابتدا از رویه‌ی سهمی شکل جدا می‌شود. اگر $v_0 = v_c$ باشد چه می‌شود؟ فرض کنید که رویه‌ای نبود و ذره از مبدأ با سرعتِ اولیه‌ی v_0 پرتاب شده بود، مسیر آن یک سهمی با معادله‌ی $y = -\frac{v_0^2 x^2}{2g} = -\alpha x^2$ بود. بنا بر این در این حالت مهم نیست که رویه وجود داشته باشد و یا نباشد، پرتابه مماس بر رویه است و نیروی عمودیِ سطح هم‌واره صفر است.

۵ شرایطِ جدا شدنِ ذره‌ای متحرک از رویه‌ای با مقطع $y = f(x)$

حالا بیایید رویه‌ای که معادله‌ی سطحِ مقطعش $y = f(x)$ با شرط $f(0) = 0$ است، را در نظر بگیریم. ذره‌ای در مبدأ با سرعتِ اولیه‌ی v_0 ، مماس بر خم $y = f(x)$ پرتاب می‌شود. فرض کنید ذره بالاخره در جایی مثل r_0 از رویه جدا می‌شود. در مکانِ جدا شدنِ نیروی عمودیِ سطح $N = 0$ و تنها نیروی وارد بر ذره $-mg\mathbf{j}$ است. پس مؤلفه‌های شتابِ ذره در نقطه‌ی جدا شدن

$$\ddot{x}|_{r_0} = 0, \quad \ddot{y}|_{r_0} = -g. \quad (5)$$

که علامتِ نقطه بالای یک کمیت به معنی‌ی مشتق‌گیری نسبت به زمان است. با توجه به معادله‌ی رویه تا وقتی که ذره روی رویه حرکت می‌کند

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}f'(x), \\ \ddot{y} &= \ddot{x}f'(x) + \dot{x}^2f''(x), \end{aligned} \quad (6)$$

که علامتِ پریم به معنی‌ی مشتق‌گیری نسبت به x است. با استفاده از این‌ها مؤلفه‌های سرعت در نقطه‌ی جدا شدن را هم می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{x_0} &= \sqrt{\frac{g}{-f''(x_0)}}, \\ \dot{y}|_{x_0} &= f'(x_0)\sqrt{\frac{g}{-f''(x_0)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

اولین نتیجه‌ای که از این معادله به دست می‌آید این است که برای آن‌که نقطه‌ی جدا شدن وجود داشته باشد جمله‌ی زیرِ رادیکال در روابط بالا باید مثبت باشد. معنی‌ی این حرف این است که در نقطه‌ی جدا شدن $f''(x_0) < 0$ باید باشد. پس رویه‌ای که در همه‌ی نقاط آن $f''(x) > 0$ است امکان ندارد شرطِ جدا شدن برقرار شود.

پایستگی‌ی انرژی معادله‌ای بین f ، و مشتقات f به ما می‌دهد

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgf(x) &= \frac{m}{2}v_0^2, \\ \Rightarrow \dot{x}^2 &= \frac{v_0^2 - 2gf(x)}{1 + f'^2(x)}. \end{aligned} \quad (8)$$

با استفاده از معادله‌ی اول (7) که در نقطه‌ی جدا شدن برقرار است و جاگذاری‌ی آن در رابطه‌ی (8) نتیجه می‌شود

$$-\frac{g}{f''(x_0)} = \frac{v_0^2 - 2gf(x_0)}{1 + f'^2(x_0)}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) (v_0^2 - 2gf(x_0)) + g(1 + f'^2(x_0)) = 0. \quad (9)$$

بنابراین با داشتن $f(x)$ و حل این معادله برای x_0 ، اگر جوابی برای آن یافت شد نقطه‌ای یافت می‌شود که شرط جداشدن برای آن وجود دارد. اما اگر این معادله جواب نداشته باشد ذره از رویه جدا نمی‌شود. یادآوری می‌کنیم که اگر تفرع رویه هم‌واره مثبت باشد جسم هرگز از رویه جدا نمی‌شود.

۶ مثال- $y = -\alpha x^k, (\alpha, k > 0)$

معادله رویه $y = -\alpha x^k, (\alpha, k > 0)$ می‌خواهیم جداشدن ذره از رویه به ازای مقادیر مختلف k بررسی کنیم. شرط (9) به صورت زیر در می‌آید

$$\alpha^2 g k (k-2) x_0^{2k-2} + \alpha v_0^2 k (k-1) x_0^{k-2} = g. \quad (10)$$

برای بررسی این که آیا معادله (10) جواب دارد یا نه، کافی است ببینیم که آیا خم $A(x_0) = \alpha^2 g k (k-2) x_0^{2k-2} + \alpha v_0^2 k (k-1) x_0^{k-2}$ خط مستقیم و ثابت $B(x_0) = g$ را قطع می‌کند.

۶-۱ $k > 2$

به ازای $k > 2$ ، $f''(0) = 0$ است. در این حالت شعاع انحنای خم $f(x)$ در $x = 0$ بی‌نهایت و رویه در نزدیکی مبدأ مثل یک سطح تخت است. با استفاده از

$$N - mg = mij, \quad (11)$$

نتیجه می‌شود که N در مبدأ مثبت است. بنابراین به ازای هیچ سرعت محدودی نمی‌توان ذره را مماس بر رویه به گونه‌ای پرتاب کرد که در همان ابتدا از رویه جدا شود. اگر $v_0 = 0$ باشد، ذره در مبدأ ساکن می‌ماند. در صورتی که اختلال کوچکی در سرعتش ایجاد کنیم شروع به حرکت می‌کند. در حالتی که $v_0 \neq 0$ است، به ازای $k > 2$ ، $A(0) = 0$ ، و $A(x_0)$ تابعی صعودی است. پس حتماً دو خم با معادله‌های $A(x_0)$ و $B(x_0)$ هم‌دیگر را قطع می‌کنند. بنابراین برای $k > 2$ ، به ازای هیچ سرعت محدودی هر چه قدر بزرگ ذره همان ابتدا از سطح جدا نمی‌شود، اما به ازای هر سرعتی هر چند کوچک حتماً مکانی وجود دارد که بعداً از رویه جدا شود.

۲-۶ $k = 2$

مورد $k = 2$ ، همان سهمی است که در ابتدا هم بررسی کردیم. اگر $v_0 = 0$ باشد، مثل حالت قبل ذره در مبدأ ساکن می ماند. برای $v_0 \neq 0$ و $k = 2$ ، $A(x_0) = 2\alpha v_0^2$ است و شرط جدا شدن همانی است که قبلاً به دست آورده بودیم. به ازای سرعت های بزرگ تر از $v_c = \sqrt{\frac{g}{2\alpha}}$ همان ابتدا از رویه جدا می شود. اگر سرعت اولیه v_c باشد همواره $N = 0$ است و ذره همیشه در مجاورت رویه می ماند. حالت اخیر مثل حالتی است که رویه ای نیست و مسیر حرکت ذره یک سهمی است. اگر سرعت اولیه کوچک تر از v_c باشد، ذره هیچ گاه از سطح جدا نمی شود.

۳-۶ $1 < k < 2$

به ازای $1 < k < 2$ ، $f''(0) \rightarrow -\infty$ و شعاع انحنای در مبدأ صفر است. برای آن که روی رویه حرکت کند در مبدأ $ij \rightarrow -\infty$ و در نتیجه N باید منفی بی نهایت شود که ممکن نیست. بنا بر این به ازای هر سرعت غیر صفری همان ابتدا ذره از رویه جدا می شود. در واقع این خم از همان اول زیر سهمی سقوط آزاد است. در صورتی که $v_0 = 0$ باشد ذره در مبدأ ساکن می ماند.

۴-۶ $k = 1$

$A(x_0) = -\alpha^2 g$ ، و دو خم $A(x_0)$ ، و $B(x_0) = g$ هیچ گاه هم دیگر را قطع نمی کنند. این انتظار را باید می داشتیم، زیرا رویه یک سطح تخت شیب دار است و ذره ای که مماس بر سطح پرتاب شود هرگز سطح را ترک نمی کند. در صورتی که $v_0 = 0$ باشد واضح است که ذره شروع به حرکت می کند ولی هرگز از سطح شیب دار جدا نمی شود.

۵-۶ $k < 1$

همواره منفی است و دو خم $A(x_0)$ ، و $B(x_0) = g$ هیچ گاه هم دیگر را قطع نمی کنند. این انتظار را باید می داشتیم، زیرا برای چنین خمی $f''(x_0) > 0$ و مطابق (7) ذره ای که مماس بر سطح پرتاب شود هرگز سطح را ترک نمی کند. در صورتی که $v_0 = 0$ باشد واضح است که ذره شروع به حرکت می کند ولی هرگز از رویه جدا نمی شود.

قدردانی- لازم می دانم از محمد خرمی و امیرحسین فتح اللهی برای پیشنهادهای مفیدی که در مورد این مقاله داشتند تشکر کنم.