در باره‌ی طیفِ هیدروژن از دیدگاهِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید

ولفگنگ پائولی

دریافت ۱۷ ژانویه‌ی ۱۹۲۶

چکیده

نشان داده می‌شود که جملاتِ بالمر برای یک اتمِ تک‌الکترونی به‌درستی از مکانیکِ کوانتومیِ جدید به دست می‌آیند و مشکلاتی که (مخصوصاً در موردِ میدان‌های متعامدِ آشکار می‌شوند و) در نظریه‌ی اولیه به خاطرِ ممنوعیتِ اضافیِ تکینگی‌های حرکت ایجاد می‌شدند، در نظریه‌ی جدید از بین می‌روند. همچنین اثرِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ خارجیِ نیرو روی طیفِ هیدروژن از دیدگاه مکانیکِ کوانتومیِ جدید بررسی شده است. با این حال، تصحیحاتِ نسبیتی در نظر گرفته نشده‌اند و فعلاً محاسبه‌ی احتمالاتِ گذار (شدت‌ها) از این مطالعه کنار گذارده شده است.

گاما، شماره ی ۳۰، مقاله ی ۱ (بهار ۱۳۹۴) ویرایش ۱ (۱۳۹۴/۲/۱۱)

Abstract

It is shown that the Balmer terms of an atom with a single electron are yielded correctly by the new quantum mechanics and that the difficulties (particularly evident in the case of crossed fields) with arose in the earlier theory through the extra prohibition of singularities in the motion, disappear in the new theory. The influence of external electric and magnetic fields of force, too, on the hydrogen spectrum is discussed from the standpoint of the new quantum mechanics. However, relativistic corrections have not been taken into account and the calculation of transition probabilities (intensities) has for the present been omitted from consideration.

This is a Farsi translation of an English translation of:
Wolfgang Pauli, *On the Hydrogen Spectrum from the Standpoint of the New Quantum Mechanics*,
Zs. f. Phys. **36** (1926) 336-363.
Gamma, no. 30, art. 1 (Spring 2015), v. 1 (1 May 2015)

URL: http://www.gammajournal.ir

© Gamma 2015

درباره‌ی طیفِ هیدروژن از دیدگاهِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید

و. پائولی ج‌ر

(دریافت 17 ژانویه‌ی 1926)

نشان داده می‌شود که جملاتِ بالمر برای یک اتمِ تک‌الکترونی به‌درستی از مکانیکِ کوانتومیِ جدید به دست می‌آیند و مشکلاتی که (مخصوصاً در موردِ میدان‌های متعامدِ آشکار می‌شوند و) در نظریه‌ی اولیه به خاطرِ ممنوعیتِ اضافیِ تکینگی‌های حرکت ایجاد می‌شدند، در نظریه‌ی جدید از بین می‌روند. همچنین اثرِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ خارجیِ نیرو روی طیفِ هیدروژن از دیدگاه مکانیکِ کوانتومیِ جدید بررسی شده است. با این حال، تصحیحاتِ نسبیتی در نظر گرفته نشده‌اند و فعلاً محاسبه‌ی احتمالاتِ گذار (شدت‌ها) از این مطالعه کنار گذارده شده است.

1. اصولِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید

هایزنبرگ [1] اخیراً، یک فرمول‌بندی برای اصولِ مکانیکِ کوانتومی منتشر کرده است که نسبت به نظریه‌ی پیشینِ سامانه‌های چندـ دوره‌ای پیش‌رفتِ قابلِ ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد. ساختارِ نظریه‌ی مکانیکِ کوانتومیِ هایزنبرگ از تصویرسازیِ سینماتیکی مکانیکیِ حرکتِ الکترون‌ها در حالاتِ مانای یک اتم کاملاً پرهیز می‌کند. به جز میان‌گینِ زمانیِ کمیت‌های سینماتیکِ کلاسیکی، تنها نوساناتِ هماهنگِ جزئی، که مربوط به هر گذار بینِ حالت‌های مانا بوده و ارتباطِ مستقیمی با احتمال‌های گذارِ خودبه‌خودیِ سامانه دارند، معرفی شده‌اند. اگر

$$x_m^n = a_m^n \exp[2\pi \mathrm{i}(\nu_m^n t + \delta_m^n)]$$

نوساناتِ جزئیِ مختصه‌ی دکارتیِ x برای یک الکترونِ معلوم در یک اتم، مربوط به گذار از یک حالتِ n به یک حالتِ دیگرِ m باشد، آن‌گاه به اندازه‌ی

$$\frac{1}{h\nu_m^n}\,\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}(2\pi\nu_m^n)^4|x_m^n|^2\cdot 2$$

در مقدارِ ضریبِ احتمالِ گسیلِ خودبه‌خودیِ A_m^n مربوط به این گذار سهیم است. در حالی که در نظریه‌ی اولیه این رابطه، بنا به اصلِ هم‌خوانی، تنها می‌توانست در حدِّ اعدادِ کوانتومیِ بزرگ به طورِ مجانبی درست باشد، اکنون می‌توان آن را به عنوانِ یک تعریفِ با اعتباری جهان‌شمول از دامنه‌های x_m^n در نظر گرفت. به طورِ کلی‌تر، نوساناتِ جزئیِ متعلق به هر یک از فرایندهای گذار به طورِ فیزیکی توسطِ شدت و قطبشِ تابشِ گسیل‌شده تعریف می‌شوند. اما این نوساناتِ جزئی دیگر نمی‌توانند درونِ 'مدارهای' مشخصِ الکترون‌های اتمی ترکیب شوند، زیرا آن‌ها وابسته به فرایندهای گذار، و نه حالاتِ مانا، هستند.

مقاله ترجمه‌ای است از ترجمه‌ی انگلیسی:

W. Pauli JR, Zs. f. Phys. **36** (1926) pp. 336-363.

که در کتابِ زیر آمده است:

Sources of Quantum Mechanics, edited by B. L. Van Der Waerden, 1968, Dover.

مترجم: مریم حاجی‌رحیمی. گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب.

[1] W. Heisenberg, Zs. f. Phys. **33** (1925) 879

فرمول‌بندیِ هایزنبرگ برای نظریه‌ی کوانتومی توسطِ بورن و یوردن [۱] ، دیراک [۲] ، و بورن، هایزنبرگ و یوردن [۳] گسترشِ بیشتری یافت. بدین ترتیب، یک سازوکارِ ریاضیِ سازگار به وجود آمد، که در آن همه‌ی روابطی که قبلاً از مکانیک کلاسیک به دست آمده بود با روابطِ نظریه‌ی کوانتومیِ مشابه بینِ متوسط‌های زمانیِ x_n^n و نوساناتِ جزئیِ x_m^n برای مختصاتِ هر یک از ذرات اتمی جایگزین شدند. دیده شد که برای فرمول‌بندیِ این روابط، مناسب است که به هر کمیتِ سینماتیکِ کلاسیکیِ x یک ماتریس نسبت داده شود. جملاتِ قطریِ چنین ماتریسی متوسط‌های زمانیِ x_n^n متعلق به حالاتِ مانای منفرد بوده، و عناصرِ $(n,\ m)$ و $(m,\ n)$ (به ترتیب، سطرِ n، ستون m، و سطرِ m، ستونِ n) نوساناتِ مزدوج مختلطِ

$$x_m^n = a_m^n \exp[2\pi \mathrm{i}(\nu_m^n t + \delta_m^n)] \quad \text{و} \quad x_n^m = a_n^m \exp[2\pi \mathrm{i}(\nu_n^m t + \delta_n^m)], \tag{1}$$

هستند با a_m^n (برابر با a_n^m) مثبت و حقیقی، و

$$\nu_n^m = -\nu_m^n, \quad \delta_n^m = -\delta_m^n. \tag{2}$$

نوسانِ هماهنگ x_n^m به گذار از m به n و نوسانِ هماهنگِ x_m^n به گذار از n به m تعلق دارد، به طوری که یکی از این گذارها نشان‌گرِ گسیل و دیگری نشانه‌ی جذب است.

به مشتقِ زمانیِ $\dot{x}$ ماتریسی نسبت می‌دهیم که هر عنصرش مشتقِ زمانیِ عنصرِ متناظرش در ماتریسِ x است، یعنی،

$$\dot{x}_m^n = 2\pi \mathrm{i} \nu_m^n x_m^n. \tag{3}$$

به خصوص، $\dot{x}_n^n = 0$، یعنی جملاتِ قطریِ $\dot{x}$ از بین می‌روند. چون $\nu_n^m = -\nu_m^n$، هم‌چنین نتیجه می‌گیریم که $\dot{x}_m^n$ و $\dot{x}_n^m$ مزدوجِ مختلط هستند (ماتریس‌ها خصوصیتِ هرمیتی دارند). به انرژیِ E باید یک ماتریسِ قطری نسبت دهیم، یعنی ماتریسی که عناصرِ غیرِ قطریش صفر هستند. مقدارِ انرژیِ حالتِ کوانتومیِ مشخص‌شده با شاخصِ n با $E_n = E_n^n$ داده می‌شود که از آن شرطِ بسامد

$$h\nu_m^n = E_n^n - E_m^n \tag{I}$$

نتیجه می‌شود که با نسخه‌ی بالا، $\nu_n^n = 0$، $\nu_n^m = -\nu_m^n$، سازگار است.

نکته‌ی اساسی، که هایزنبرگ بر آن تأکید داشت، در این واقعیت نهفته است که اکنون حاصل‌ضربِ دو ماتریسِ x و y یک معنیِ مناسب، از دیدگاهِ شرطِ بسامد، پیدا می‌کند. xy، حاصل‌ضربِ دو ماتریسِ x و y به صورتِ زیر تعریف می‌شود

$$(xy)_m^n = \sum_l x_l^n y_m^l \tag{4}$$

از (I) قانونِ ترکیبِ

$$\nu_l^n + \nu_m^l = \nu_m^n \tag{5}$$

نتیجه می‌شود و بنابراین کمیتِ $(xy)_m^n$ به درستی دوباره یک نوسانِ هماهنگ با بسامدِ ν_m^n را نشان می‌دهد، اگر x_l^n و y_m^l نوساناتِ هماهنگ با بسامدهای به ترتیب ν_l^n و ν_m^l باشند. برای عبارتِ δ_m^n، هم باید یک قانونِ ترکیبِ

$$\delta_l^n + \delta_m^l = \delta_m^n \tag{6}$$

[۱] M. Born and P. Jordan, Zs. f. Phys. **34**, (1925), 858

[۲] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **109**, (1925), 642

[۳] M. Born, W. Heisenberg and P. Jordan, Zs. f. Phys. **35**, (1926), 557؛ از این پس با نامِ 'Quanttenmechanik II' موردِ اشاره قرار می‌گیرد.

را در نظر گرفت.

همه‌ی قوانینِ محاسباتیِ معمولی در ضربِ دو ماتریس کاربرد دارند، به جز قانونِ جابه‌جایی: در حالتِ کلی xy با yx فرق می‌کند. پس، برای مثال، تفاضلِ $Ex - xE$ (که E ماتریسِ قطریِ انرژی بوده و حاصل‌ضرب‌ها طبقِ دستورالعملِ کلیِ (۴) انجام می‌شوند) به سادگی، با استفاده از (۳) و شرطِ بسامدِ (I)، به ماتریسِ $\dot{x}$، مشتقِ زمانیِ x، مربوط می‌شود:

$$Ex - xE = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\,\dot{x}, \tag{7}$$

این رابطه برای هر ماتریسِ دل‌خواهِ x درست است.

روابطِ لازم برای محاسبه‌ی ماتریس‌های x برای یک سامانه‌ی مکانیکی، یعنی قوانینِ فیزیکیِ بنیادیِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید، توسطِ بورن و یوردن به شکلِ زیر در آمده‌اند (که ما آن‌ها را بلافاصله برای سامانه‌های دارای درجاتِ آزادیِ به دل‌خواه زیاد به‌کار می‌بریم). مختصاتِ دکارتیِ ذراتِ اتمی و تکانه‌های متناظر با آن‌ها را با q_ρ و p_ρ، $(\rho = 1 \cdots f)$ نشان می‌دهیم که $p_x = m\dot{x}$ و به همین‌ترتیب. پس، علاوه بر شرطِ بسامدِ (I)، 'شرط‌های کوانتومیِ'

$$\begin{gathered} p_\rho p_\sigma - p_\sigma p_\rho = 0, \quad q_\rho q_\sigma - q_\sigma q_\rho = 0, \\ p_\rho q_\sigma - q_\sigma p_\rho = \begin{cases} 0 & \rho \neq \sigma \text{ برای}, \\ \dfrac{h}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \mathbf{1} & \rho = \sigma \text{ برای}. \end{cases} \end{gathered} \tag{II}$$

را داریم. در این‌جا $\mathbf{1}$ ماتریسِ یکّه را نشان می‌دهد (که جملاتِ غیرِ قطریِ آن صفر و هر یک از عناصرِ قطریِ آن برابرِ 1 هستند). همان طور که کرامرز [۱] نشان داده است، با این فرض که هر ذره‌ی اتمیِ منفرد همانندِ ذراتِ آزادِ تحتِ نیروهایِ خارجیِ کم‌بسامد رفتار می‌کند، این روابط را می‌توان از دیدگاهِ روابطِ پاشندگیِ نظریه‌ی کوانتومیِ لادنبرگ، کرامرز، و کرامرز و هایزنبرگ توصیف کرد. در نهایت، به عنوانِ آخرینِ قانون کوانتومی، قانونِ پایستگیِ انرژی

$$H(p, q) = E \ \text{(ماتریسِ قطری)}. \tag{III}$$

را داریم. تابعِ ماتریسیِ $H(q\ p,)$ یک سامانه‌ی کوانتومیِ معلوم را مشخص می‌کند و روشن‌ترین فرض برای ساختنش آن است که انتظار داشته باشیم هنگامِ استفاده از مختصاتِ دکارتی این تابع از نظرِ ظاهری با تابعِ کلاسیکی یکی شود. کافی است موردی را در نظر بگیریم که که شاملِ دو بخش، مربوط به انرژیِ جنبشی و انرژیِ پتانسیل، است که یکی فقط به p و دیگری فقط به q بستگی دارد. طبقِ قانونِ ضربِ (4)، تنها توابعِ ماتریسی‌ای که در لحظه‌ی اول تعریف می‌شوند آن‌هایی هستند که به شکلِ دنباله‌های توانی از p و q (با توان‌های مثبت و منفی) نوشته می‌شوند. بورن، هایزنبرگ و یوردن نشان دادند که در این حالت قوانینِ اصلیِ (I)، (II) و (III) به روابطِ ماتریسی‌ای منجر می‌شوند که کاملاً مشابهِ روابطِ حرکت در مکانیکِ کلاسیک می‌باشند. آن‌ها را می‌توان با تعریفِ مناسبِ ضرایبِ مشتقِ جزئی که در سمتِ راست ظاهر می‌شوند، به صورتِ

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_\rho}, \quad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q_\rho}. \tag{8}$$

نوشت.

به علاوه یادآوری می‌شود که ترتیبِ قرار دادن و آرایشِ حالاتِ مانای سامانه‌ی موردِ بررسی درونِ ماتریس‌ها مهم نیست و این که در نظریه‌ی جدید مفهومِ 'عددِ کوانتومی' واردِ قوانینِ اصلی نمی‌شود. هم‌چنین، در نظریه‌ی جدید، برعکسِ راهِ حلی که قبلاً استفاده می‌شد، مقادیرِ احتمالِ گذارها حتی برای اعدادِ کوانتومیِ کوچک علی‌الاصول به

[۱] H. A. Kramers, Physica **5**, (1925), 369

طورِ کمّی تعیین شده‌اند.

2. بررسیِ کلیِ روش‌ها و نتایجِ محاسباتِ متعاقبِ آن

این مقاله با قصدِ آن که نظریه‌ی جدید را برای اتمی با یک الکترون به کار گیرد تهیه شده است. اگرچه، تاکنون نتوانسته‌ایم، برای چنین موردِ اتمِ هیدروژن‌گونه‌ای، همه‌ی نتایجِ قوانینِ پایه‌ی نظریه‌ی جدید را بسط دهیم، و به خصوص تاکنون تلاشی برای محاسبه‌ی احتمال‌های گذارِ طیفِ هیدروژن‌گونه نکرده‌ایم. ما خود را به محاسبه‌ی مقادیرِ انرژیِ حالت‌های مانای اتمِ هیدروژن برای حالتِ غیرِ اختلالی، و موردی که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ خارجی وجود دارند (بدونِ احتمال‌های گذار) محدود نموده‌ایم. در حالِ حاضر جملاتِ تصحیحِ نسبیتی را در نظر نگرفته‌ایم. در نتیجه، جملاتِ دنباله‌ی بالمر و اثرِ استارک سازگار با مشاهدات، به دست آمده‌اند. به علاوه، مشکلاتِ برخواسته در نظریه‌ی قدیمی که هنگامِ منعِ اضافیِ حرکاتِ تکینه که در آن الکترون به قدرِ کافی به هسته نزدیک می‌شود، و مخصوصاً در موردِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ متعامد ظاهر می‌شد، در این‌جا از بین می‌روند. برای نشان‌دادنِ این موضوع، ما این مشکلات را با جزئیات توضیح می‌دهیم.

با بررسیِ موردِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ موازی شروع می‌کنیم. با e و m_0 به عنوانِ بار و جرمِ الکترون، Ze بار هسته و a نیم‌قطرِ مدارِ الکترون و F و H به ترتیب شدتِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، بسامدِ لارمور به صورتِ

$$o_H = \frac{eH}{4\pi m_0 c}, \tag{9}$$

و بسامدِ مشخصه‌ی اثرِ استارک، o_F، با

$$o_F = \frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{Zm_0}}\ F = \frac{3}{2}\ eF\ \frac{a_1}{h}\ n, \tag{10}$$

که کمیت a_1 به صورتِ

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 Ze^2 m_0}.$$

نشان‌دهنده‌ی شعاعِ اولین مدارِ کوانتومیِ دایروی در اتم است. در حضورِ میدان‌های خارجی، دو شرطِ کوانتومیِ اضافی داریم که z، تصویر در راستایِ میدانِ فاصله‌ی نقطه‌ی میانیِ مدارِ الکتریکی از هسته، به صورتِ

$$z = \frac{3}{2}a(s/n), \tag{11}$$

و گشتاورِ تکانه‌ی P_z موازیِ میدان به شکلِ

$$P_z = m(h/2\pi) \tag{12}$$

تعیین می‌شود. برای nِ معلوم و $|m| \leqq n$، عددِ کوانتومیِ اثرِ استارکِ s در این‌جا مقادیرِ دنباله‌ی اعدادِ [1]

$$s = -(n-|m|), \quad -(n-|m|-2), \cdots, \quad (n-|m|-2), \quad n-|m|, \tag{13}$$

[1] این از رابطه‌ی s و n با اعدادِ کوانتومیِ n_ξ و n_η مربوط به مختصاتِ سهمویِ ξ و η می‌آید، یعنی:

$$n = n_\xi + n_\eta + |m|, \quad s = n_\xi - n_\eta$$
$$0 \leqq n_\xi \leqq n, \quad 0 \leqq n_\eta \leqq n.$$

را با $|m| \leqq n$، می‌پذیرد، که نسبت به صفر متقارن است و هر یک از دیگری به اندازه‌ی دو واحد اختلاف دارد (در حالِ حاضر از قیودِ اضافی چشم می‌پوشیم). بنابراین انرژیِ اضافی در حضورِ یک میدان با

$$E_1 = (so_F + mo_H)h. \tag{14}$$

داده می‌شود. برای تعمیمِ آن به موردِ میدان‌های متعامد، مناسب است که بسامدهای

$$\omega_1 = o_H + o_F, \quad \omega_2 = |o_H - o_F|$$

را به جای o_F و o_H معرفی کنیم. در این صورت، روابطِ (13) و (14) با

$$E_1 = \left(\tfrac{1}{2}n - n_1\right)\omega_1 h + \left(\tfrac{1}{2}n - n_2\right)\omega_2 h \tag{15}$$

معادل خواهند بود که در آن

$$0 \leqq n_1 \leqq n, \quad 0 \leqq n_2 \leqq n. \tag{16}$$

چون ω_1 و ω_2 همواره مثبت تعریف می‌شوند، یعنی

$$\begin{array}{ll} \omega_2 = o_H - o_F & \text{برای} \quad o_H > o_F, \\ \omega_2 = o_F - o_H & \text{برای} \quad o_H < o_F, \end{array}$$

ارتباطِ بینِ اعدادِ s و m، و اعدادِ n_1 و n_2، با

$$\begin{array}{lll} m = n - (n_1 + n_2), & s = n_2 - n_1 & \text{برای} \quad o_H > o_F, \\ m = n_2 - n_1, & s = n - (n_1 + n_2) & \text{برای} \quad o_H < o_F, \end{array} \tag{17}$$

داده می‌شود (برای $o_H = o_F$ داریم $\omega_2 = 0$ و سامانه تبه‌گن است).

اکنون، در حالتِ کلیِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ متعامد، نتایجِ کلاین [1] و لنز [2] ایجاب می‌کنند که عبارتِ (15) برای انرژیِ اختلالی در حالاتِ کوانتومیِ سامانه هنوز معتبر باشد با این شرط که بسامدهای ω_1 و ω_2 به صورتی که در زیر می‌آید، تعریف شوند. $\mathfrak{o}_F$ و $\mathfrak{o}_H$ را به ترتیب *بردارهای* موازی با جهت‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ به کار رفته می‌گیریم، که مقادیرشان با بسامدهای مشخصه‌ی (10) یا (9)، که از هر یک از این میدان‌ها به تنهایی حاصل می‌شوند، یک‌سان است. سپس، جمع و تفریقِ *برداری* $\mathfrak{o}_F$ و $\mathfrak{o}_H$ را تشکیل داده، و اندازه‌های مربوطه را حساب می‌کنیم، تا

$$\omega_1 = |\mathfrak{o}_H + \mathfrak{o}_F|, \quad \omega_2 = |\mathfrak{o}_H - \mathfrak{o}_F|, \tag{18}$$

را به دست آوریم. برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ موازی، این با پیش‌بینی‌های پیشین سازگار است.

اگر بخواهیم این نتیجه را به ممنوعیتِ مدارهایی ربط دهیم که موجب می‌شوند الکترون در مسیرِ حرکتش یا درونِ هسته بیافتد یا به قدرِ دل‌خواه به آن نزدیک شود، به مشکلات مهمی بر می‌خوریم. اولین نمونه از قوانینِ طردِ اضافی پیشتر هم در نظریه‌ی نسبیتیِ ساختارِ ریزِ سامرفلد ظاهر شده‌اند. آن‌جا، حالاتِ با عددِ کوانتومیِ تکانه‌ی صفرِ k، که در آن الکترون در امتدادِ یک مسیرِ مستقیمِ گذرنده از مرکزِ هسته به جلو و عقب نوسان می‌کند، باید طرد می‌شد چون برای حالاتِ مانا نامناسب بود:

$$k \neq 0. \tag{19}$$

[1] O. Klein, Zs. f. Phys. **22**, (1924),109.

[2] W. Lenz, Zs. f. Phys. **24**, (1924), 197 اعدادِ نمایش داده شده با n_1 و n_2 در آن مقاله برای مقادیرِ فردِ n عددِ صحیح نیستند؛ با اختلافِ مشترکی به اندازه‌ی یک واحد، آن‌ها از $-\frac{1}{2}n$ تا $\frac{1}{2}n$ تغییر می‌کنند، که (اگر مقید به قوانینِ کوانتومی برای سیستم‌های نوسانی باشیم) مقادیرِ نهایی را نیز در برمی‌گیرند.

به طورِ مشابه، در موردِ اثرِ استارک، مقدارِ $|s| = n$ برای عددِ کوانتومیِ اثرِ استارک مربوط به چنین حرکتِ نوسانیِ مستقیم‌الخطی بوده، به طورِ تجربی مطمئناً هرگز نمی‌تواند در واقعیت رخ دهد:

$$|s| \neq n. \tag{20}$$

با مقایسه‌ی تعدادِ حالت‌های مانا در ساختارِ ریزِ نسبیتی تحتِ اثرِ میدان‌های نیروی ضعیف با تقارنِ محوری، با تعدادِ آن حالته‌ها در اثرِ استارک، بور توانست به طورِ کاملاً کلی نشان دهد که، به خاطرِ قیدِ اضافیِ (19) هنگامِ به کارگیری در میدان‌های با تقارنِ محوری، همه‌ی مدارهای با $m = 0$ نیز می‌باید طرد شوند. ضمناً، در اثرِ استارک برای چنین مدارهایی الکترون بایَد به طورِ دلخواه به هسته نزدیک شود. پس

$$m \neq 0. \tag{20'}$$

شرطِ (2)، مثلِ یک موردِ خاص، در (20′) مستتر است، زیرا برای $s = n$ طبقِ (13)، عددِ m فقط می‌تواند صفر شود. اکنون، برای میدان‌های متعامد می‌توان مدارهایی که به عنوانِ حالت‌های مانا مجاز هستند را به طورِ پیوسته به مدارهایی که با (20) و (20′) طرد می‌شوند، تبدیل کرد. برای این کار، تنها کافی است فرایندِ بی‌درروی زیر را انجام داد: فرض کنید در ابتدا دو میدان موازی بوده و o_H با o_F متفاوت باشد، برای مثال، $o_H > o_F$. سپس، بعد از چرخاندنِ آرامِ جهتِ میدان‌ها نسبت به یک‌دیگر، شدتِ میدانِ مغناطیسی را (تا رسیدن به نقطه‌ای که $|o_H| < |o_F|$) کم کنید، در پایان میدان‌ها را دوباره با هم موازی کنید. در این فرایند، ω_1 و ω_2 همواره طبقِ (18) غیرِ صفر باقی می‌مانند و بنابراین اعدادِ کوانتومیِ n_1 و n_2 همیشه همان مقادیرشان را حفظ می‌کنند. اما، چون در ابتدا $o_H > o_F$ و در پایان $o_H < o_F$، از (17) نتیجه می‌شود که فرایند این اثر را دارد که به هر حالتِ دیگری که در آن *عددِ کوانتومیِ الکتریکیِ s و عددِ کوانتومیِ m با هم عوض شده‌اند* تبدیل شود. به طورِ خاص، مدارِ نوسانیِ $s = n$، $m = 0$ به مدارِ دایرویِ $s = 0$، $m = n$ که صفحه‌ی آن عمود بر جهتِ میدان است، تبدیل شده است. بنابراین آشکار است که قواعدِ طردِ اضافی که منع‌کننده ی مدارهای نوسانی مستقیم‌الخط هستند را نمی‌توان در چارچوبِ نظریه‌ی کوانتومیِ سامانه‌های با تناوب چندگانه اعمال کرد.

اکنون محاسبه‌ی انجام‌شده در زیر (§5) نشان می‌دهد که قواعدِ طردِ اضافیِ خاص در مکانیکِ کوانتومیِ جدید، که تصور نمی‌کنیم در آن حالاتِ مانا با مدارهای الکترونیِ خاصی نمایش داده شوند، زائد هستند؛ بنابراین مشکلاتِ ایجادشده در بالا خودبه‌خود از بین می‌روند. بنابراین برای nـاُمین حالتِ کوانتومیِ اتمِ غیرِ اختلالی، با انرژیِ

$$E_n = -RhZ^2/n^2 \tag{21}$$

(R= ثابتِ ریدبرگ)، یک‌بارِ دیگر مقادیرِ (14) و (15) را برای انرژیِ اضافی در حضورِ میدانِ الکتریکی و مغناطیسیِ به ترتیب موازی و عمود بر هم به دست می‌آوریم. کمیت‌های o_H و o_F دوباره با (9) و (10) و ω_1 و ω_2 با (18) داده می‌شوند. اما طبقِ مکانیکِ جدید، همه جا در معادلاتِ (13)، (16) و (17)، باید n را به شکلِ

$$n^* = n - 1 \tag{22}$$

عوض کرد. این مقدار اکنون مثلِ یک حدِّ بیشینه برای مقادیرِ s، m و n_1، n_2، عمل می‌کند، به گونه‌ای که اکنون داریم

$$s = -(n^* - |m|), \quad -(n^* - |m| - 2), \ \cdots \ (n^* - |m| - 2), \quad n^* - |m|, \quad \text{با} \quad |m| \leqq n^*, \tag{13*}$$

$$0 \leqq n_1 \leqq n^*, \quad 0 \leqq n_2 \leqq n^*, \tag{16*}$$

$$\begin{array}{lll} m = n^* - (n_1 + n_2), & s = n_2 - n_1 & \text{برای} \quad o_H > o_F, \\ m = n_2 - n_1, & s = n^* - (n_1 + n_2) & \text{برای} \quad o_H < o_F. \end{array} \tag{17*}$$

به خصوص، برای اثرِ استارک، طبقِ (10) و (14)، رابطه‌ی

$$E_1 = \tfrac{3}{2} eFa_1 ns, \qquad \text{با} \quad 0 \leqq s \leq n^*, \tag{23}$$

که همان چیزی است که آزمایش ایجاب می‌کند. به علاوه، همان‌طور که فرایندِ بی‌درروی مذکور در بالا برای میدان‌های متعامد ایجاب می‌کند، دیده می‌شود که اینک مجموعه مقادیری که m و s می‌گیرند کاملاً متقارن است.

وقتی تبه‌گنیِ اتمِ مختل‌نشده با یک میدانِ نیروی اضافیِ مرکزی (مثلاً، میدانِ برخواسته از تصحیحاتِ نسبیتی) و یک میدانِ مغناطیسیِ خارجی برداشته شود، حالتِ کوانتومیِ nـاُمِ اتم، که انرژی‌اش با (21) داده شده است، طبقِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید به حالت‌هایی تجزیه می‌شود که می‌توان آن‌ها با اعدادِ کوانتومیِ k و m، با قواعدِ انتخابِ آشنای

$$\Delta k = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \ \pm 1,$$

مشخص نمود. دوباره عددِ صحیح m، طبقِ (12)، مؤلفه‌ی تکانه‌ی اتم به موازاتِ میدان را مشخص می‌کند، در حالی که نمی‌توان چنین معنیِ دینامیکیِ مستقیمی را به عددِ k نسبت داد که مقدارِ انرژیِ اختلالیِ میدانِ مرکزی را تعیین می‌کند. برای یک حالتِ کوانتومیِ از مرتبه‌ی n، عددِ k می‌تواند $n-1$ مقدارِ متوالیِ با اختلافِ مشترکِ یک واحد را بگیرد. به این ترتیب تعدادِ ترازهای ساختارِ ریز در هر رخ‌دادی، بدونِ معرفیِ هیچ قیدِ اضافی، به دست می‌آید (اگرچه هنوز نمی‌توانیم هیچ پیش‌بینی‌ای در موردِ مقادیرِ انرژیِ آن‌ها داشته باشیم). می‌خواهیم عددِ کوانتومیِ k را چنان بهنجار کنیم که برای هر حالتِ مشخص‌شده با n و k در حضورِ یک میدانِ مغناطیسیِ خارجی، عددِ کوانتومیِ m یک مقدارِ صحیح در گستره‌ی

$$-k \leqq m \leqq k \tag{24}$$

داشته باشد. در یک حالتِ کوانتومیِ مرتبه‌ی n، عددِ k که بدین صورت بهنجار شده باشد می‌تواند مقادیرِ

$$k = 0, \ 1, \ 2, \ , \ \cdots, \ n^*. \tag{25}$$

را بگیرد. می‌توان یک تناظرِ یک‌تا بینِ حالاتِ درونِ رده‌بندیِ (24) و (25) و حالاتِ مشخص‌شده با (13^*) برقرار کرد. وزنِ حالتِ کوانتومیِ مرتبه‌ی n (در هر مورد) برابر با n^2 است.

به خصوص، از مجموعه جملاتِ بالا برای اتمِ هیدروژن‌گونه در میدان‌های خارجی، وقتی با نظریه‌ی جدید به دست می‌آید، در می‌یابیم که برای حالتِ پایه‌ی چنین اتمی، هنگامی که $n = 1$ و $n^* = 0$، عددِ کوانتومیِ m هیچ مقداری به جز $m = 0$ ندارد؛ بنابراین این حالت غیرِ تبه‌گن است. این نتیجه ممکن است، مخصوصاً در مقایسه با رفتارِ اتم‌های قلیایی، عجیب به نظر بیاید. در این رابطه، باید تأکید کنیم که ظاهراً نسخه‌ی کنونی از مکانیکِ کوانتومیِ جدید، تا این لحظه، نمی‌تواند اثرِ زیمانِ نابهنجار (شکستِ نظریه‌ی لارمور) را توضیح دهد و در نتیجه ممکن است هنوز نیاز به اصلاحاتی داشته باشد. غیرِ ممکن نیست اگر چنین اصلاحاتی در نظریه، حتی در موردِ اتم‌های با تنها یک الکترون هم ظاهر شوند. ما در پایانِ این مقاله (§6) به این موضوع برخواهیم گشت.

طبقِ روشِ به کار رفته در زیر برای حلِ معادلاتِ ماتریسیِ نظریه‌ی جدید در موردِ اتم‌های با تنها یک الکترون، باید ابتداً (در §3) قواعدِ لازم برای اعمالِ هم‌زمان با ماتریس‌های مختصاتِ دکارتیِ الکترون، x، y، z (که درونِ یک ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{r}$ با هم ترکیب می‌شوند)، ماتریسِ بزرگیِ بردارِ شعاعِ r، و مشتقِ زمانیِ آن‌ها را بیابیم. نسخه‌ی جدیدِ قوانینِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید ایجاب می‌دارد که از معرفیِ زاویه‌ی قطبیِ φ اجتناب کنیم. چون این کمیت به حدودِ متناهی محدود نمی‌شود، نمی‌تواند، برای مثال، همانندِ مختصاتِ موردِ اشاره‌ی بالا رسماً به عنوانِ یک ماتریسِ معرفی شود، که این انعطاف‌پذیریِ مکانیکِ کلاسیک را از بین می‌برد.

درست به همین دلیل، ثابت می‌شود که روشِ انتگرال‌گیریِ خاصِ زیر، که قابلِ استفاده روی نیروهای کولنی در مکانیکِ کلاسیک بوده و قبلاً توسطِ لنز [1] به کار گرفته شده است، به خصوص برای استفاده در مکانیکِ کوانتومیِ

[1] W. Lenz, Zs. f. Phys. **24**, (1924), 197

جدید مناسب است. اگر

$$\mathfrak{P} = m_0[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] \tag{26}$$

نشان‌گرِ تکانه‌ی زاویه‌ایِ مستقل از زمانِ الکترون حولِ هسته، و

$$\mathfrak{p} = m_0\mathfrak{v}$$

تکانه‌ی خطی باشد، آن‌گاه می‌توان مستقیماً از معادلاتِ حرکتِ مکانیکِ کلاسیک نشان داد که بردارِ

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{Ze^2m_0}\,[\mathfrak{P}\mathfrak{p}] + \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{27}$$

نسبت به زمان ثابت است. آن‌گاه ضربِ داخلی در $\mathfrak{r}$، رابطه‌ی

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) = -\frac{1}{Ze^2m_0}\,\mathfrak{P}^2 + r \tag{28}$$

را می‌دهد. این معادله‌ی یک مقطعِ مخروطی است، و از روی آن می‌توان دید که $\mathfrak{A}$ در امتدادِ خطِ واصلِ هسته به نقطه‌ی اوجِ بیضی بوده و مقدارِ آن برابر با مقدارِ عددیِ خروج از مرکزِ بیضی است. با مجذور کردنِ (27)، رابطه‌ی

$$1 - \mathfrak{A}^2 = -\frac{2E}{m_0Z^2e^4}\,\mathfrak{P}^2 \tag{29}$$

به دست می‌آید که در آن E انرژی است.

در §4 نشان داده می‌شود که در مکانیکِ جدید هم، می‌توان یک ماتریسِ برداریِ مستقل از زمانِ $\mathfrak{A}$ متناظر با (27) تعریف کرد که برای آن، همراه با ماتریسِ برداریِ تکانه‌ی زاویه‌ایِ $\mathfrak{P}$ (باز هم مستقل از زمان)، روابطی مشابه با (28) و (29) برقرار است. اگر، علاوه بر آن، شرایطِ کوانتومیِ (II) را که مشخصه‌ی مکانیکِ جدید هستند، همراه با روابطِ حاصله در §3 به کار بریم، یک مجموعه از معادلاتِ ماتریسی به دست می‌آوریم که فقط ماتریس‌های مستقل از زمانِ $\mathfrak{A}$، $\mathfrak{P}$ و E را دربردارند؛ مختصات (یعنی، احتمال‌های گذار) حذف می‌شوند. آن‌گاه حلِ این معادلاتِ اخیر که با روش‌های ابتداییِ (§5) قابلِ حصول است، به نتایجی منجر می‌شود که در بخشِ حاضر تا الان موردِ بررسی قرار گرفته‌اند.

3. قواعدِ محاسباتی برای ماتریسِ برداریِ شعاع. قانونِ پایستگیِ تکانه برای نیروهای مرکزی

با ساختِ قواعدِ محاسباتی برای ماتریس‌های مختصاتِ دکارتیِ الکترون، x، y، z، که مؤلفه‌های ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{r}$ را می‌سازند، و برای ماتریسِ r که اندازه‌ی بردارِ شعاع را نشان می‌دهد، شروع می‌کنیم. واضح است که این‌ها باید در رابطه‌ی

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{30}$$

صدق کنند. شرایطِ کوانتومیِ (II) نه تنها جابه‌جاپذیریِ x با y، و x با $\dot{y}$، و $\dot{x}$ با $\dot{y}$ (و به طورِ مشابه برای بقیه‌ی مختصات) یعنی

$$xy = yx, \;\cdots; \quad x\dot{y} = \dot{y}x, \;\cdots; \quad \dot{x}\dot{y} = \dot{y}\dot{x}, \;\cdots. \tag{31a}$$

را نشان می‌دهد، بلکه آن‌ها هم‌چنین روابطِ بینِ حاصلِ ضربِ x با مؤلفه‌ی تکانه‌ی p_x (و به طورِ مشابه برای دیگر کمیت‌های کانونی) را نشان می‌دهند:

$$p_x x - x p_x = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\,\mathbf{1}, \;\cdots \tag{31b}$$

($p_x = m\dot{x}$ مؤلفه‌ی x از تکانه‌ی خطیِ $\mathfrak{p} = m\mathfrak{v}$ است، که یک ماتریسِ برداری با مؤلفه‌های p_x، p_y و p_z است). این‌جا و در آن‌چه بعد از این می‌آید، وجودِ معادلاتِ مشابه برای مختصاتِ دیگر را با '...' نشان می‌دهیم، که با جای‌گشتِ چرخه‌ایِ مختصات در عبارتِ نوشته شده به دست می‌آیند.

این قواعد را می‌توان با روابطِ اضافیِ زیر، با استفاده از ماتریسِ r، گسترش داد. اولاً، r هم با x، y و z جابه‌جا می‌شود. این را می‌توان به صورتِ معادله‌ی برداریِ

$$r\mathfrak{r} = \mathfrak{r}r. \tag{32}$$

نوشت. ثانیاً، برای هر تابعِ گویای دل‌خواهِ f از r، x، y و z، رابطه‌ی

$$p_x f - f p_x = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \cdots \tag{33}$$

برقرار است، و به ویژه برای $f = r$:

$$\mathfrak{p}r - r\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\ \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{34}$$

برعکس، برای هر تابعی که بتوان آن را به صورتِ یک دنباله از توان‌های مثبت و منفی از x، y، z، و r نوشت، رابطه‌ی (33) از (31) و (34) به دست می‌آید، که این را می‌توان به سادگی با استقراء نشان داد. رابطه‌ی (34) هم‌چنین با (30) سازگار است. به این دلیل، وجودِ روابطِ (32) و (33) یک نیازِ لازم برای قانونِ پایستگیِ انرژی

$$\frac{1}{2}m\mathfrak{v}^2 + F(x, y, z, r) = E \quad \text{(ماتریسِ قطری)} \tag{35}$$

(برای سادگی، در این‌جا فرض می‌کنیم که تنها یک ذره داریم)، همراه با شرطِ بسامد (که منجر به معادله‌ی

$$E\Phi - \Phi E = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\ \dot{\Phi}$$

برای هر Φ می‌شود)، ایجاد می‌کند تا به معادلاتِ حرکتِ

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f}{\partial x} \tag{36}$$

منجر شوند. بنابراین فرض می‌کنیم که یک ماتریسِ r وجود دارد که در روابطِ (30)، (32) و (34) صدق می‌کند.

اکنون ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{P}$ را تعریف می‌کنیم، که تکانه‌ی زاویه‌ایِ ذره حولِ مبداء را نشان می‌دهد. ابتدا یادآور می‌شویم که مثلِ جبرِ برداریِ معمولی، باید ضربِ نرده‌ایِ دو ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را به صورتِ عبارتِ

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z,$$

و حاصلِ ضربِ برداریِ $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$، را به عنوانِ یک ماتریسِ برداریِ جدید با مؤلفه‌های

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y,\ \cdots\ . \tag{37}$$

تعریف کنیم. معمولاً، ترتیبِ ضرایبِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ مهم است: این‌جا عباراتِ $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{A})$ و $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$ در حالتِ کلی صفر نیستند، زیرا قانونِ جابه‌جایی برای ضرب به کار نمی‌آید. در ضمن، معمولاً مؤلفه‌های $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]$، حاصلِ ضربِ برداریِ ماتریسِ $\mathfrak{A}$ با خودش، غیرِ صفر است:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]_x = \mathfrak{A}_y\mathfrak{A}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{A}_y,\ \cdots\ . \tag{37'}$$

با این حال، اگر حاصلِ ضربِ برداریِ $[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$ را تشکیل دهیم یک موردِ خاص خواهیم داشت، زیرا این عبارت به خاطرِ جابه‌جاپذیریِ x با $\dot{y}$ برابرِ $-[\mathfrak{v}\mathfrak{r}]$ است. پس می‌توانیم ماتریسِ برداریِ

$$\mathfrak{P} = m[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = -m[\mathfrak{v}\mathfrak{r}] \tag{38}$$

را به عنوانِ تکانه‌ی زاویه‌ایِ ذره تعریف کنیم.

این ماتریس در قواعدِ جابه‌جاییِ زیر، که پیامدهای مستقیمِ (31a) و (31b) هستند، صدق می‌کند :

$$\begin{gathered} xP_x = P_x x, \ \cdots ; \quad xP_y - P_y x = P_x y - yP_x = -\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\, z, \ \cdots ; \\ (\mathfrak{r}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{r}) = 0, \end{gathered} \tag{39}$$

و هم چنین

$$\begin{gathered} p_x P_x = P_x p_x, \ \cdots ; \\ p_x P_y - P_y p_x = P_x p_y - p_y P_x = -\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\, p_z, \ \cdots ; \\ (\mathfrak{P}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}\mathfrak{P}) = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

از این نتیجه می‌گیریم که $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ با P_x، P_y و P_z جابه‌جا می‌شود [1] :

$$v^2\mathfrak{P} = \mathfrak{P}v^2. \tag{41}$$

به علاوه، از (34) جابه‌جاپذیریِ r با P_x، P_y و P_z را نتیجه می‌گیریم،

$$r\mathfrak{P} = \mathfrak{P}r\,; \tag{42}$$

بنابراین $F(r)$، هر تابعی از فقط r، با $\mathfrak{P}$ جابه‌جا می‌شود. اگر با یک نیروی مرکزی سروکار داشته باشیم، که در آن انرژیِ پتانسیل تنها به r بستگی داشته باشد،

$$\frac{1}{2}m\mathfrak{v}^2 + F(r) = E \quad \text{(ماتریسِ قطری)} \tag{35$'$}$$

درمی‌یابیم که

$$E\mathfrak{P} = \mathfrak{P}E,$$

و بنابراین ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{P}$ نسبت به زمان (انتگرالِ تکانه‌ی زاویه‌ای) ثابت می‌ماند.

برای حاصلِ ضربِ برداریِ $\mathfrak{P}$ در خودش ((37′) را ببینید)، به سادگی می‌توان رابطه‌ای را به دست آورد که بعداً[2] موردِ استفاده است

$$[\mathfrak{P}\mathfrak{P}] = -\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\, \mathfrak{P}. \tag{43}$$

برای مثال، از (39) و (40) برای مؤلفه‌ی z ِ $[\mathfrak{P}\mathfrak{P}]$ داریم:

$$\begin{aligned} P_x P_y - P_y P_x &= P_x(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)P_x \\ &= (P_x z - zP_x)p_x - x(P_x p_z - p_z P_x) \\ &= \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}(yp_x - xp_y) = -\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\, P_z. \end{aligned}$$

[1] به اتحادِ $a^2b - ba^2 \equiv a(ab - ba) + (ab - ba)a$ توجه کنید.

[2] به (3) ‘Quantenmechanik II’, p. 597, eq. مراجعه کنید. کمیت‌هایی که آن‌جا با M_x، M_y، و M_z نشان داده شده‌اند، مؤلفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ایِ منفی را نشان می‌دهند.

اکنون در جایگاهی هستیم که می‌توانیم تکانه‌ی شعاعیِ $p_r = m\dot{r}$ را حساب کنیم، زیرا این در حقیقت برابر است با

$$p_r = \frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\, m(Er - rE) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\, \tfrac{1}{2}[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)r - r(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)]$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\, \tfrac{1}{2}[p_x(p_x r - rp_x) + p_y(p_y r - rp_y) + p_z(p_z r - rp_z) \\ +(p_x r - rp_x)p_x + (p_y r - rp_y)p_y + (p_z r - rp_z)p_z],$$

و بنابراین، به خاطرِ (34)، داریم

$$p_r = \frac{1}{2}\left[\left(\mathfrak{p}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\right) + \left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\,\mathfrak{p}\right)\right]. \tag{44}$$

اکنون از (33)

$$\left(\mathfrak{p}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\right) - \left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\,\mathfrak{p}\right) = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathfrak{r}}{r} = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{2}{r},$$

به طوری که (44) را می‌توان به صورتِ

$$p_r = (\mathfrak{p}\mathfrak{r})\,\frac{1}{r} - \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{p}) + \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{1}{r} \tag{44'}$$

هم نوشت. با ضربِ آن در r، ابتدا، رابطه‌ی

$$p_r r + rp_r = (\mathfrak{p}\mathfrak{r}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{p}) \tag{45}$$

را به دست می‌آوریم که مستقیماً با مشتق‌گیری از (30) نسبت به زمان هم به دست آمده است. در ضمن

$$p_r r - rp_r = (\mathfrak{p}\mathfrak{r}) - (\mathfrak{r}\mathfrak{p}) - \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathbf{2}.$$

اکنون عبارتِ $(\mathfrak{p}\mathfrak{r}) - (\mathfrak{r}\mathfrak{p})$ به معنیِ $(p_x x - xp_x) + (p_y y - yp_y) + (p_z z - zp_z)$ است. از (31b) هر یک از عباراتِ درونِ براکت مقدارِ

$$\frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathbf{1}.$$

دارند. پس نتیجه‌ی کلیِ

$$p_r r - rp_r = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathbf{1}. \tag{46}$$

را به دست می‌آوریم. در نهایت، برای آماده‌سازی برای کاربردی که در پی می‌آید، مشتقِ زمانیِ $\mathfrak{r}/r$ را حساب می‌کنیم. برای مثال، برای مؤلفه‌ی x از (34) استفاده می‌کنیم تا

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathsf{x}}{\mathsf{r}} &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\Big(\mathsf{E}\frac{\mathsf{x}}{\mathsf{r}} - \frac{\mathsf{x}}{\mathsf{r}}\mathsf{E}\Big) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\,\frac{1}{2m}\Big(\mathfrak{p}^2\frac{\mathsf{x}}{\mathsf{r}} - \frac{\mathsf{x}}{\mathsf{r}}\mathfrak{p}^2\Big)\\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\,\frac{1}{2m}\Big\{\mathfrak{p}\Big(\mathfrak{p}\frac{x}{r} - \frac{x}{r}\mathfrak{p}\Big) + \Big(\mathfrak{p}\frac{x}{r} - \frac{x}{r}\mathfrak{p}\Big)\mathfrak{p}\Big\}\\
&= \frac{1}{2m}\Big\{\Big(p_x\frac{y^2+z^2}{r^3} - p_y\frac{xy}{r^3} - p_z\frac{xz}{r^3}\Big)\\
&\qquad + \Big(\frac{y^2+z^2}{r^3}p_x - \frac{xy}{r^3}p_y - \frac{xz}{r^3}p_z\Big)\Big\}\\
&= \frac{1}{2m}\Big\{\Big(P_y\frac{z}{r^3} - P_z\frac{y}{r^3}\Big) + \Big(\frac{z}{r^3}P_y - \frac{y}{r^3}P_z\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

را به دست آوریم. آن‌گاه، در حالتِ کلی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathfrak{r}}{r} = \frac{1}{2m}\Big\{\Big[\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\Big] - \Big[\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\mathfrak{P}\Big]\Big\}. \tag{47}$$

4. معرفیِ ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{A}$ ثابتِ زمانی برایِ نیروهایِ کولنی. حذفِ مختصات

اتمی ار درنظر بگیریم که شاملِ یک هسته‌ی ثابت دارای بارِ $+Ze$ است و بر یک تک الکترونِ مداری به جرمِ m_0 و بارِ $-e$ نیروی جاذبه‌ی کولنی وارد می‌کند. برای هامیلتونی، باید

$$\frac{1}{2m_0}\mathfrak{p}^2 - \frac{Ze^2}{r} = E \quad \text{(ماتریسِ قطری)} \tag{48}$$

را تشکیل دهیم، یعنی، در این موردِ خاص عبارتِ

$$F(r) = -Ze^2/r$$

را در $(35')$ قرار می‌دهیم. معادلاتِ حرکتِ (36) حاصل از پایستگیِ انرژی با کمکِ قوانینِ کوانتومی در این‌جا همان شکلی را ایجاب می‌کنند که در مکانیکِ کلاسیک داشتیم:

$$\dot{\mathfrak{p}} = m_0\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{Ze^2}{r^3}\,\mathfrak{r}. \tag{49}$$

به طورِ مشابه با مکانیکِ کلاسیک (به (27) مراجعه کنید)، از (47) نتیجه می‌گیریم که ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{A}$ که به صورتِ

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{Ze^2m_0}\frac{1}{2}\{[\mathfrak{P}\mathfrak{p}] - [\mathfrak{p}\mathfrak{P}]\} + \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{50}$$

تعریف می‌شود، در موردِ خاصِ میدانِ کولنیِ نیرو، نسبت به زمان ثابت است. با استفاده از (40)، هم چنین می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{1}{Ze^2m_0}\Big\{[\mathfrak{P}\mathfrak{p}] + \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathfrak{p}\Big\} + \frac{\mathfrak{r}}{r}\\
&= -\frac{1}{Ze^2m_0}\Big\{[\mathfrak{p}\mathfrak{P}] + \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathfrak{p}\Big\} + \frac{\mathfrak{r}}{r}.\end{aligned} \tag{51'}$$

بقیه‌ی محاسبات، با استفاده از قواعدِ جمع‌آوری‌شده در بخشِ پیشین، کاملاً ابتدایی هستند. در وهله‌ی اول، مشابه با معادله‌ی (28) برای یک مخروطی در مکانیکِ کلاسیک، رابطه‌ی

$$\frac{1}{2}[(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{A})] = -\frac{1}{Ze^2 m_0}\left[\mathfrak{P}^2 + \frac{3}{2}\frac{h^2}{4\pi^2}\right] + r, \tag{51}$$

و هم‌چنین قانونِ جابه‌جاییِ

$$\frac{1}{2}([\mathfrak{A}\mathfrak{r}] + [\mathfrak{r}\mathfrak{A}]) = -\frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{Ze^2 m_0}\mathfrak{P}. \tag{52}$$

را به دست می‌آوریم.

به علاوه، معلوم می‌شود روابطِ زیر برقرار اند، که در آن‌ها x، y، z و r کاملاً حذف شده‌اند و تنها شاملِ ماتریس‌های $\mathfrak{A}$، $\mathfrak{P}$ و E اند که نسبت به زمان ثابت اند:

$$[\mathfrak{P}\mathfrak{P}] = -\frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathfrak{P} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned} A_x P_x = P_x A_x,\ \cdots, \\ A_x P_y - P_y A_x = P_x A_y - A_y P_x = -\frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,A_z,\ \cdots, \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{A}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{A}] = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{2}{m_0 Z^2 e^4}\,E\mathfrak{P}. \tag{III}$$

$$1 - \mathfrak{A}^2 = -\frac{2}{m_0 Z^2 e^4}\,E\left(\mathfrak{P}^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right). \tag{IV}$$

معادله‌ی (I) با معادله‌ی (43) در بخشِ قبل یکی است، شکلِ (II) مشابهِ (39) است و (IV) مشابهِ معادله‌ی کلاسیکیِ (29) است، اگرچه حضورِ جمله‌ی اضافیِ $h^2/4\pi^2$ (هم چنین جمله‌ی اضافیِ $\frac{3}{2}h^2/4\pi^2$ در (51)) مشخصه‌ی مکانیکِ جدید است.

از وجودِ ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{A}$، که نسبت به زمان ثابت است، می‌توانیم دریابیم که یک اتم با تنها یک الکترون (وضعیتی شبیه حرکتِ کپلری در مکانیکِ کلاسیک)، حتی صرفِ نظر از جهت‌گیریِ فضاییِ اتم، دارای ساختارِ تبه‌گن است. یعنی، می‌توانیم به سادگی از روابطِ حاصل‌شده در بالا چنین نتیجه بگیریم که در حالتِ کلی $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P}^2\mathfrak{A}$ نمی‌تواند صفر شود. از سوی دیگر، چون $\mathfrak{A}\,E - E\,\mathfrak{A}$ صفر می‌شود، واضح است که برای هر مقدارِ انرژیِ E فقط یک مقدارِ یکتای $\mathfrak{P}^2$ وجود ندارد؛ پس ساختار واقعاً تبه‌گن است.

همان‌طور که بورن، هایزنبرگ و یوردن [1] با جزئیات بررسی کرده‌اند، وقتی چنین سامانه‌ای از دیدگاهِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید بررسی می‌شود دامنه‌های نوساناتِ جزئیِ متفاوتِ متعلق به گذارهای بینِ حالت‌های با انرژیِ از پیش تعیین‌شده را نمی‌توان به طورِ یکتا با معادلاتِ مکانیکِ کوانتومی به دست آورد. به علاوه، ماتریس‌هایی که نسبت به زمان ثابت هستند معمولاً قطری نیستند، به طوری که عناصرِ غیرِ صفر می‌توانند مکان‌های $(n,\ m)$ مربوط به یک بسامدِ غیرِ صفرِ $\nu_m^n = (E_n - E_m)/h = 0$ را اشغال کنند. در حالتِ موردِ بررسیِ ما، به هر مقدارِ انرژی (به هر مقدارِ عددِ کوانتومیِ اصلی) یک ماتریس تعلق می‌گیرد که شاملِ اجزای مستقل از زمانِ یک کمیت (مثلاً، x یا r)

[1] Quantenmechanik II, Chapter 2, §2.

بوده و تعدادِ سطر و ستون‌های آن برابرِ وزنِ آن حالتِ انرژیِ به خصوص است. این ماتریس را می‌توان به این تربیت به دست آورد که در ماتریسِ اصلی برخی عناصر را صفر گذاشت، آن عناصری که متناظر اند با گذارهایی با انرژیِ متفاوت. آن را متوسطِ زمانیِ کمیتِ موردِ نظر می‌نامیم و با یک خط بالای آن کمیت، (مثلاً $\overline{x}$ یا $\overline{r}$) نشان می‌دهیم.

اگرچه در یک سیستمِ تبه‌گن، نوسان‌های جزئیِ تکیِ یک کمیتِ سینماتیکیِ دارای بسامدِ یک‌سانِ ν_m^n به طورِ یکتا تعیین نمی‌شوند، هنوز مقادیرِ انرژی و وزن‌های آماریِ این کمیت‌ها به طورِ یکتا به دست می‌آیند [۲]. پس اساساً باید بتوان جملاتِ بالمر و وزن‌های آماریِ مربوطه را از معادلاتِ (I) تا (IV)، بدونِ هیچ فرضِ مشخص‌کننده‌ی اضافی درباره‌ی نوعِ راه حل، به دست آورد. این چیزی است، که با کمالِ تأسف، مؤفق به انجامش نشده‌ایم و در ادامه با معرفیِ ملزوماتِ اضافی (به روش‌های مختلف) که جوابِ یکتایی برای معادلاتِ (I) تا (IV) ارائه می‌دهد، از این مشکل اجتناب می‌کنیم.

اگر تبه‌گنی با یک میدانِ اختلالیِ اضافی که هامیلتونیِ آن H_1 است برطرف شود، آن‌گاه، همان‌طور که با انجامِ محاسبه‌ی اختلال طبقِ روشِ بورن، هایزنبرگ و یوردن [۱] می‌توان دید، میانگینِ زمانیِ تابعِ اختلالیِ $\overline{H}_1$، روی تمامِ حرکتِ غیرِ اختلالی، باید یک ماتریسِ قطری باشد. در وضعیتِ موردِ مطالعه‌ی ما، این مقدارِ میانگین به طورِ کلی نه تنها به انرژیِ غیرِ اختلالیِ E بلکه به $\mathfrak{P}$ و $\mathfrak{A}$ نیز بستگی دارد.

اگر، به ویژه، میدانِ اختلالی ناشی از یک نیروی مرکزیِ غیرِ کولنیِ اضافی باشد، میانگینِ زمانیِ بالا (به جز بستگی به E) فقط به $\mathfrak{P}^2$ بستگی دارد، زیرا این‌جا هیچ جهتِ مرجحی در فضا وجود ندارد. به علاوه، انرژیِ اختلالیِ یک میدانِ مغناطیسی در جهتِ z تنها به P_z مؤلفه‌ی تکانه موازی با میدان، بستگی دارد. پس این شرط که $\mathfrak{P}^2$ و P_z باید ماتریس‌های *قطری* باشند به یک جوابِ خاص برای معادلاتِ (I) تا (IV) منجر می‌شود که با ساختارِ ریزِ نسبیتی و یک میدانِ مغناطیسیِ ضعیف سازگار است. ما این مورد را در بخشِ بعدی بررسی می‌کنیم.

یک موردِ قابلِ توجه دیگر با اثرِ استارک پیش می‌آید. این جا، ما با حضورِ یک ماتریسِ قطریِ $\overline{\mathfrak{z}}$ روبه‌روییم که مؤلفه‌ی ماتریسِ برداریِ مستقل از زمانِ $\overline{\mathfrak{r}}$ در امتدادِ میدان (جهتِ z) است که مرکزِ الکتریکیِ مدار را نشان می‌دهد. اما، می‌توان نشان داد که رابطه‌ی این ماتریسِ $\overline{\mathfrak{r}}$ با ماتریسِ $\mathfrak{A}$ دقیقاً به همان شکلِ نظریه‌ی کلاسیکی، یعنی رابطه‌ی

$$\overline{\mathfrak{r}} = \frac{3}{2}\,\frac{Ze^2}{2|E|}\,\mathfrak{A}, \tag{53}$$

است (به طورِ کلاسیکی، $Ze^2/2|E|$ نیم‌قطرِ بزرگِ a در بیضیِ کپلری را نشان می‌دهد). یعنی، در گامِ اول همان قواعدِ جابه‌جایی بر $\overline{\mathfrak{r}}$ و $\mathfrak{P}$ حاکم است که در روابطِ (39) و (II) بینِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{P}$ برقرار بود. به علاوه، اگر بعد از آن (52) را با (III) مقایسه کنیم، روابطِ

$$\left[\mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{r}} - \frac{3}{2}\,\frac{Ze^2}{2|E|}\,\mathfrak{A}\right] = 0$$

را به دست می‌آوریم که در آن تفاضلِ

$$\overline{\mathfrak{r}} - \frac{3}{2}\,\frac{Ze^2}{2|E|}\,\mathfrak{A}$$

وارد شده است. همان‌طور که با بررسیِ دقیق‌تر بر پایه‌ی جواب‌های معادلاتِ (I) تا (IV)، که در بخشِ بعد به دست می‌آیند، می‌توان دید، این‌ها می‌توانند تعدادِ کافی معادلاتِ خطیِ هم‌گن بسازند که به ما اجازه می‌دهند تا نتیجه بگیریم که عبارتِ

[۲] Quantenmechanik II, Chapter 2, §2 and Chapter 3.
[۱] Quantenmechanik II, Chapter 2, §2 and Chapter 3.

$$\bar{\mathfrak{r}} - \frac{3}{2}\,\frac{Ze^2}{2|E|}\,\mathfrak{A}$$

صفر می‌شود. اگر ما میدانِ الکتریکی در جهتِ z را با یک میدانِ مغناطیسیِ هم‌جهت با آن کامل کنیم، می‌توانیم از (53)، با این قرارداد که A_z و P_z *ماتریس‌های قطری باشند*، برای مشخص کردنِ این مورد استفاده کنیم.

نهایتاً، در پایانِ بخشِ بعد موردِ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ متعامد را هم بررسی می‌کنیم. همان‌طور که به طورِ دقیق در §2 توضیح داده شد، این مورد به خاطرِ حضورِ شرایطِ طردِ اضافی برای حرکاتِ تکینه(منفرد)، که در نظریه‌ی اولیه ظاهر می‌شدند، در خورِ توجهِ ویژه است.

5. حلِ معادلاتِ (I) تا (IV). به دست آوردنِ جملاتِ بالمر.

(a) P_z و $\mathfrak{P}^2$ *ماتریس‌های قطری هستند.* برای این موردِ اول، که تبه‌گنی با افزودنِ یک میدانِ مرکزیِ اضافی و یک میدانِ مغناطیسیِ ضعیف در راستای z برداشته می‌شود، *نهاده ی* زیر را برای برآورده شدنِ معادلاتِ (I) و (II) پیشنهاد می‌کنیم. برای یک مقدارِ معلومِ $\mathfrak{P}^2$، فرض کنیم مقادیرِ ممکنِ P_z برابرِ

$$P_{z\,k,m}^{\;k,m} = mh/2\pi, \tag{54}$$

باشند که m از $-k$ تا $+k$ تغییر می‌کند:

$$-k \leqq m \leqq k. \tag{54'}$$

به علاوه، فرض کنیم نوساناتِ جزئیِ $\mathfrak{P}$، که به تغییرِ m به اندازه‌ی ± 1 مربوطند، در صفحه‌ی $(x,\ y)$ چپ‌گرد و راست‌گرد باشند:

$$P_{y\,k,m\pm 1}^{\;k,m} = \pm \mathrm{i} P_{x\,k,m\pm 1}^{\;k,m}. \tag{55}$$

آن‌گاه از (I) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} |P_{x\,k,m\mp 1}^{\;k,m}|^2 = |P_{y\,k,m\mp 1}^{\;k,m}|^2 &= \frac{1}{4}\,\frac{h^2}{4\pi^2}\,[k(k+1) - m(m\mp 1)] \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{h^2}{4\pi^2}\,(k\pm m)(k+1\mp m). \end{aligned} \tag{56}$$

$$(\mathfrak{P}^2)_{k,m}^{k,m} = \frac{h^2}{4\pi^2}\,k(k+1). \tag{57}$$

سپس ماتریسِ $\mathfrak{A}$ را، مطابق با فرمولِ هونل‌ـ کرونیگ برای شدتِ مؤلفه‌های زیمان، تشکیل می‌دهیم،

$$A_{y\,k',m\pm 1}^{\;k,m} = \pm \mathrm{i} A_{x\,k',m\pm 1}^{\;k,m} \qquad (k' = k+1 \ \text{یا}\ k-1), \tag{58}$$

$$|A_{x\,k,m\pm 1}^{\;k+1,m}|^2 = |A_{y\,k,m\pm 1}^{\;k+1,m}|^2 = \frac{1}{4} C_k^{k+1}(k\mp m)(k\mp m+1), \tag{59}$$

وقتی m با $m-1$ یا $m+1$ جای‌گزین می‌شود، رابطه‌ی زیر هم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |A_{x\,k+1,m\pm 1}^{\;k,m}|^2 &= |A_{y\,k+1,m\pm 1}^{\;k,m}|^2 \\ &= \tfrac{1}{4} C_{k+1}^{k}(k\pm m+1)(k\pm m+2). \end{aligned} \tag{59a}$$

در پایان، برای A_z رابطه‌ی

$$|A_{z\,k,m}^{\;k+1,m}|^2 = C_k^{k+1}[(k+1)^2 - m^2]. \tag{60}$$

را داریم. هنوز باید این موضوع را بررسی کنیم که آیا m (و بنابراین، هم‌چنین k) یک عددِ صحیح یا نیمه‌صحیح است؛ هم‌چنین فعلاً C_k^{k+1} توابعِ نامعلومی از k هستند که هرگز مقادیرِ منفی نمی‌گیرند و در رابطه‌ی تقارنیِ

$$C_k^{k+1} = C_{k+1}^k \tag{61}$$

صدق می‌کنند. نکته‌ی دیگر مربوط به علامت‌های $\mathfrak{A}$ در مقایسه با علامت‌های $\mathfrak{P}$ است: اگر فرض کنیم P_x و A_z مثبت و حقیقی باشند، آن‌گاه بسته به این که با گذارهای مربوط به تغییراتِ هم‌گونِ k و m (مثلِ $A_{x\,k+1,m-1}^{\;k,m}$ و $A_{x\,k-1,m+1}^{\;k,m}$) یا تغییراتِ ناهم‌گونِ آن‌ها (مثلِ $A_{x\,k+1,m+1}^{\;k,m}$ و $A_{x\,k-1,m-1}^{\;k,m}$) سروکار داریم، A_x را باید مثبت یا منفی بگیریم. وقتی محاسبات را انجام دهیم، معلوم می‌شود که این روش معادلاتِ (I) و (II) در بخشِ پیش را برآورده می‌کند. به علاوه، به طورِ معکوس از ملاحظاتِ بورن، هایزنبرگ و یوردن [1] چنین نتیجه می‌گیریم که اگر $\mathfrak{P}^2$ و P_z را ماتریس‌های قطری بگیریم، عبارتی که این‌جا برای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{P}$ انتخاب کردیم یک نتیجه‌ی لازم از (I) و (II) است.

اکنون به منظورِ تعیینِ بهنجارشِ m و k و تابعِ C_{k+1}^k، از معادله‌ی (III) در بخشِ قبل استفاده می‌کنیم. با این حال، تنها کافی است از مؤلفه‌ی z استفاده کنیم،

$$A_xA_y - A_yA_x = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{2}{m_0Z^2e^4}\,EP_z. \tag{62}$$

برای مثال، اگر عبارتِ

$$P_y(A_xA_y - A_yA_x) - (A_xA_y - A_yA_x)P_y = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{2}{m_0Z^2e^4}\,E(P_yP_z - P_zP_y)$$

را تشکیل دهیم و از (I) و (II) استفاده کنیم، یک معادله به دست می‌آوریم که در توافق با مؤلفه‌ی x از (III) است. به طورِ مشابه، مؤلفه‌ی y رابطه‌ی (III) هم از مؤلفه‌ی z این معادله‌ی برداری و معادلاتِ (I) و (II) به دست می‌اید.

اگر عضوی از معادله‌ی (62) را تشکیل دهیم که مکانِ $(k,\ m)$ را در دنباله‌ی قطری اشغال می‌کند، ابتدا، از روی (58) و (59)، برای دستِ چپِ (62)، رابطه‌ی

$$\begin{aligned}(A_xA_y - A_yA_x)_{k,m}^{k,m} &= 2\mathrm{i}\{|A_{x\,k+1,m-1}^{\;k,m}|^2 - |A_{x\,k+1,m+1}^{\;k,m}|^2 \\ &\quad + |A_{x\,k-1,m-1}^{\;k,m}|^2 - |A_{x\,k-1,m+1}^{\;k,m}|^2\} \\ &= \mathrm{i}m\{-(2k+3)C_k^{k+1} + (2k-1)C_{k-1}^k\},\end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم. چیزِ بیشتری برای گفتن باقی نمانده جز این که E یک علامتِ منفی دارد، و با تعریفِ ثابتِ ریدبرگ به صورتِ

$$R = 2\pi^2e^4m_0/h^3 \tag{63}$$

همراه با مقدارِ P_z که در (54) داده شده است، می‌بینیم که معادله‌ی (62) به شرطِ

$$m\{-(2k+3)C_k^{k+1} + (2k-1)C_{k-1}^k\} = \frac{|E|}{RhZ^2}\,m. \tag{64}$$

منجر می‌شود.

[1] به فصلِ ۴، بخشِ ۱ از Quantenmechanik II ، هم‌چنین مبحثِ اثرِ زیمان در فصلِ ۴، بخشِ ۲ مراجعه کنید.

بیایید اول از همه کمترین مقدارِ ممکنِ k برای یک $|E|$ی معلوم را در نظر بگیریم. واضح است که سهمِ گذارِ $k \to k-1$ در سمتِ چپ برای این مقدارِ k از بین می‌رود، و بنابراین ضریبِ m در سمتِ چپ حتماً مثبت نیست، در حالی که ضریبِ m در سمتِ راست مثبت است. بنابراین معادله‌ی (64) برای کمترینِ مقدارِ k تنها در صورتی معتبر است که $m = 0$. اما طبقِ (54)، این بدان معنی است که کمترین مقدارِ k خودش باید صفر شود، زیرا در غیرِ این‌صورت m می‌تواند مقادیرِ دیگری غیر از صفر اختیار کند. *بنابراین k و m الزاماً عددِ صحیح هستند*، و k مقادیرِ

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots n^*, \tag{65}$$

را می‌پذیرد که در آن n^* بیشترین مقدارِ قابلِ حصولِ k برای یک $|E|$ی معلوم است. اکنون (64) لازم می‌دارد که

$$(2k-1)C_{k-1}^{k} - (2k+3)C_{k}^{k+1} = \frac{|E|}{RhZ^2} \qquad \text{برای} \quad k = 1,\ \cdots n^* \tag{64'}$$

افزون بر آن، باید

$$C_{n^*}^{n^*+1} = 0, \tag{64''}$$

را تقاضا کنیم، زیرا واضح است که سهمِ گذارِ $k+1 \to k$ (جمله‌ی دوم) برای $k = n^*$ از بین می‌رود. با شروع از $k = n^*$ و کاهشِ پله‌ایِ k، می‌توانیم به طورِ پیاپی مقادیرِ

$$C_{n^*-1}^{n^*},\ C_{n^*-2}^{n^*-1},\ \cdots,\ C_0^1$$

را از روی $(64')$ حساب کنیم. نتیجه را می‌توان با فرمولِ

$$\begin{aligned} C_k^{k+1} &= \frac{|E|}{RhZ^2}\ \frac{n^*(n^*+2) - k(k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{|E|}{RhZ^2}\ \frac{(n^*-k)(n^*+k+2)}{(2k+1)(2k+3)}. \end{aligned} \tag{66}$$

بیان کرد. در ضمن با جایگزینیِ k با $k-1$،

$$\begin{aligned} C_{k-1}^{k} &= \frac{|E|}{RhZ^2}\ \frac{n^*(n^*+2) - (k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{|E|}{RhZ^2}\ \frac{(n^*-k+1)(n^*+k+1)}{(2k-1)(2k+1)}. \end{aligned} \tag{66'}$$

را به دست می‌آوریم. با کمکِ این روابط، به طورِ مستقیم می‌توانیم نشان دهیم که روابطِ $(64')$ و $(64'')$ برآورده می‌شوند.

در نهایت، برای به دست آوردنِ خودِ مقدارِ انرژی، از آخرین معادله (IV) استفاده می‌کنیم. ابتدا، مقدارِ $\mathfrak{A}^2$ را در مکانِ $(k,\ m)$ از دنباله‌ی قطری تعیین می‌کنیم. به خاطرِ (59) و (60) رابطه‌ی

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}^2)_{k,m}^{k,m} &= 2|A_{x\,k+1,m+1}^{k,m}|^2 + 2|A_{x\,k+1,m-1}^{k,m}|^2 + |A_{z\,k+1,m}^{k,m}|^2 \\ &+2|A_{x\,k-1,m+1}^{k,m}|^2 + 2|A_{x\,k-1,m-1}^{k,m}|^2 + |A_{z\,k-1,m}^{k,m}|^2 \\ &= (k+1)(2k+3)C_k^{k+1} + k(2k-1)C_{k-1}^{k}, \end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم و با جایگذاری از (66) و $(66')$ رابطه‌ی

$$(\mathfrak{A}^2)_{k,m}^{k,m} = \frac{|E|}{RhZ^2}\ [n^{*2} + 2n^* - k(k+1)]. \tag{67}$$

را داریم.

اکنون باید این عبارت را برای $\mathfrak{A}^2$ و عبارتِ (57) را برای $\mathfrak{P}^2$ در (IV) جایگذاری کنیم تا

$$1 = \frac{|E|}{RhZ^2}\,(n^{*2} + 2n^* + 1) = \frac{|E|}{RhZ^2}\,(n^* + 1)^2,$$

و بنابراین (با قرار دادنِ $n = n^* + 1$)

$$|E| = \frac{RhZ^2}{(n^* + 1)^2} = \frac{Rh^2Z^2}{n^2}, \tag{68}$$

را به دست آوریم، که شبیه آن چیزی است که در §2 داشتیم. این نشان می‌دهد که جملاتِ بالمر به درستی از مکانیکِ کوانتومیِ جدید نتیجه می‌شوند و وزنِ n^2 مربوط به حالتِ کوانتومیِ nـاُمِ نظریه‌ی جدید است.

(b) A_z و P_z *ماتریس‌های قطری هستند (اثرِ استارک)*. اگر یک میدانِ الکتریکیِ هم‌گن با شدتِ F در جهتِ z اثر کند، میانگینِ زمانیِ انرژیِ اختلالی با (53) داده می‌شود،

$$E_1 = \tfrac{3}{2}eF\bar{z} = \tfrac{3}{2}eF\,\frac{Ze^2}{2|E|}\,A_z. \tag{69}$$

بنابراین، در این مورد، ما دنبالِ جوابی برای معادلاتِ (I) تا (IV) هستیم که در آن A_z یک ماتریسِ قطری باشد. این شرطِ اضافی که P_z، هم، باید یک ماتریسِ قطری باشد، این مفهومِ فیزیکی را دارد که فرض می‌کنیم تبه‌گنیِ اختلالیِ کلیِ اثرِ استارک با کمکِ یک میدانِ مغناطیسیِ ضعیفِ اضافیِ موازی با میدانِ الکتریکی از بین رفته باشد.

در این‌جا، بدونِ واردِ شدن به تک‌تکِ جزئیاتِ محاسبات و بدونِ اثباتِ این موضوع که جوابِ ارائه شده برای معادلاتِ (I) تا (IV) تنها جوابی است که تحتِ آن A_z و P_z ماتریس‌های قطری خواهند بود، فقط به این بسنده می‌کنیم که نتیجه را بیان کنیم. حالت‌های متعلق به یک مقدارِ معینِ انرژیِ غیرِ اختلالی مثلِ آن‌چه در (68) داده شده است، را باید با دو عددِ کوانتومیِ s و m رده‌بندی کرد، که اولی مقدارِ A_z (و انرژیِ اختلالیِ E_1) را، مطابق با

$$A_{z\,s,m}^{\;s,m} = s/n, \qquad E_1 = \tfrac{3}{2}eFa_1ns \quad (0 \leqq s \leqq n^*), \tag{70}$$

تعیین می‌کند (که $a_1 = h^2/4\pi^2Ze^2m_0$) و دومی مقدارِ P_z را، به صورتِ

$$P_{z\,s,m}^{\;s,m} = mh/2\pi. \tag{71}$$

معین می‌کند. گستره‌ی مقادیرِ s و m قبلاً در بخشِ §2 با رابطه‌ی (13*) داده شده است. ماتریس‌های P_x، P_y، A_x، و A_y تنها در جاهایی عناصرِ غیرِ صفر دارند که متناظر با تغییرِ یک واحدیِ ±1 در s و m باشند. مقادیرِ آن‌ها با

$$P_{y\,s',m\pm1}^{\;s,m} = \pm\mathrm{i}P_{x\,s',m\pm1}^{\;s,m}, \quad A_{y\,s',m\pm1}^{\;s,m} = \pm\mathrm{i}A_{x\,s',m\pm1}^{\;s,m} \qquad (s' = s+1 \text{ یا } s-1). \tag{72}$$

$$\begin{aligned} A_{x\,s\pm1,m\pm1}^{\;s,m} &= +\frac{2\pi}{h}\,\frac{1}{n}\,P_{x\,s\pm1,m\pm1}^{\;s,m}, \\ A_{x\,s\mp1,m\pm1}^{\;s,m} &= -\frac{2\pi}{h}\,\frac{1}{n}\,P_{x\,s\mp1,m\pm1}^{\;s,m}, \end{aligned} \tag{73}$$

(در این روابطِ آخر باید علامتِ بالایی یا پایینی را در سراسرِ رابطه حفظ کرد)، و

$$\begin{aligned} |P_{x_{s-1,m-1}}^{s,m}|^2 &= |P_{y_{s-1,m-1}}^{s,m}|^2 \\ &= \frac{1}{16}\,\frac{h^2}{4\pi^2}\,[n^*+2-(m+s)][n^*+(m+s)], \\ |P_{x_{s+1,m-1}}^{s,m}|^2 &= |P_{y_{s+1,m-1}}^{s,m}|^2 \\ &= \frac{1}{16}\,\frac{h^2}{4\pi^2}\,[n^*+2-(m-s)][n^*+(m-s)] \end{aligned} \tag{74}$$

داده می‌شود. به سادگی می‌توان بررسی کرد که وقتی از عباراتِ (70) تا (74) استفاده می‌کنیم، معادلاتِ (I) تا (IV) واقعاً برآورده می‌شوند.

(c) *میدان‌های متقاطع.* اگر بردارهای $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{H}$ به ترتیب شدتِ میدان‌های خارجیِ الکتریکی و مغناطیسی را نشان دهند، میانگینِ زمانیِ انرژیِ اختلالی در حضورِ هر دو میدان با

$$E_1 = \tfrac{3}{2}ea(\mathfrak{E}\mathfrak{A}) + \frac{e}{2m_0c}\,(\mathfrak{H}\mathfrak{P}). \tag{75}$$

داده می‌شود. کمیتِ a، که در نظریه‌ی پیشین نیم‌قطرِ بیضیِ کپلری را نشان می‌داد، اکنون به سادگی فقط یک خلاصه‌نویسی برای

$$a = \frac{Ze^2}{2|E|}. \tag{76}$$

است. ما بردارهای $\mathfrak{o}_F$ و $\mathfrak{o}_H$، که به ترتیب موازیِ $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{H}$ بوده و مقادیرشان برابرِ بسامدهای مشخصه‌ای است که وقتی به دست می‌آیند که تنها یکی از میدان‌های خارجیِ هم‌گن وجود می‌داشت، را چنان تعریف می‌کنیم (به (9) و (10) مراجعه کنید) که

$$\mathfrak{o}_H = \frac{e\mathfrak{H}}{4\pi m_0c}, \qquad \mathfrak{o}_F = \frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{Zm_0}}\,\mathfrak{E} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{e\mathfrak{E}}{\sqrt{(2m_0|E|)}}. \tag{77}$$

آن‌گاه می‌توانیم (75) را به صورتِ

$$E_1 = \sqrt{\frac{Z^2Rh}{|E|}}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{o}_F)h + 2\pi(\mathfrak{P}\mathfrak{o}_H). \tag{75a}$$

بنویسیم. اکنون مناسب است [1] که ماتریسِ برداریِ $\mathfrak{F}_1$ و $\mathfrak{F}_2$ را که با

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{F}_1 &= \frac{2\pi}{h}\,\mathfrak{P} + \sqrt{\frac{Z^2Rh}{|E|}}\,\mathfrak{A}, \\ 2\mathfrak{F}_2 &= \frac{2\pi}{h}\,\mathfrak{P} - \sqrt{\frac{Z^2Rh}{|E|}}\,\mathfrak{A}, \end{aligned} \tag{78}$$

تعریف می شوند، چنان معرفی کنیم که

$$\frac{2\pi}{h}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2, \quad \sqrt{\frac{Z^2Rh}{|E|}}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2, \tag{78a}$$

[1] آن را باید با مقاله‌های کلاین و لنتز موردِ اشاره در زیرنویس‌های ([1] و [2]، توضیحاتِ بعد از معادلاتِ (17)، بخشِ §2 مقایسه کرد.

و نیز دو بردارِ

$$\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}_H + \mathfrak{o}_F, \quad \mathfrak{o}_2 = \mathfrak{o}_H - \mathfrak{o}_F \tag{79}$$

را معرفی کنیم که قدرِ مطلقِ آن‌ها در بخشِ §2 با ω_1 و ω_2 (به معادله‌ی (18) مراجعه کنید) نشان داده می‌شد. سپس به سادگی می‌توان انرژیِ اختلالیِ (75a) را به صورتِ

$$E_1 = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{o}_1)h + (\mathfrak{F}_2\mathfrak{o}_2)h. \tag{80}$$

نوشت. به طورِ مشابه، درونِ روابطِ (I) تا (IV)، به جای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{P}$، ماتریس‌های برداریِ $\mathfrak{F}_1$ و $\mathfrak{F}_2$ (که در (78a) داده شده‌اند) را قرار می‌دهیم. آن‌گاه یک محاسبه‌ی ساده به روابطِ زیر

$$\boldsymbol{I}_{1x}\boldsymbol{I}_{2x} = \boldsymbol{I}_{2x}\boldsymbol{I}_{1x}, \ \cdots, \quad \boldsymbol{I}_{1x}\boldsymbol{I}_{2y} = \boldsymbol{I}_{2y}\boldsymbol{I}_{1x}, \quad \boldsymbol{I}_{2x}\boldsymbol{I}_{1y} = \boldsymbol{I}_{1y}\boldsymbol{I}_{2x}, \ \cdots \tag{81}$$

$$[\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1] = \mathrm{i}\mathfrak{F}_1, \quad [\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_2] = \mathrm{i}\mathfrak{F}_2, \tag{82}$$

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}_2^2 = \tfrac{1}{4}(RhZ^2/|E| - 1) = \tfrac{1}{4}(n^2 - 1) = \tfrac{1}{2}n^*(\tfrac{1}{2}n^* + 1). \tag{83}$$

منجر می‌شود. روابطِ (81) بیان می‌دارند که هر مؤلفه‌ی $\mathfrak{F}_1$ با هر مؤلفه‌ی $\mathfrak{F}_2$ جابه‌جا می‌شود. ساختارِ روابطِ (82) کاملاً مشابه معادلاتِ (I) است؛ در قسمتِ آخرِ (83)، مقادیرِ انرژیِ (68) به کار رفته‌اند.

از (80) نتیجه می‌گیریم که علامتِ مشخصه‌ی موردِ میدان‌های متقاطع این واقعیت است که $(\mathfrak{F}_1\mathfrak{o}_1)$ و $(\mathfrak{F}_2\mathfrak{o}_2)$، یا به طورِ معادل، *مؤلفه‌های* $\mathfrak{F}_1$ *و* $\mathfrak{F}_2$ *موازی با* $\mathfrak{o}_1$ *و* $\mathfrak{o}_2$ (که به صورتِ $\mathfrak{F}_{1\|}$ و $\mathfrak{F}_{2\|}$ نوشته می‌شوند)، *ماتریس‌های موازی هستند*. اگر فرض کنیم که P^2 و P_z ماتریس‌های قطری باشند، آن‌گاه جوابِ معادلاتِ (82) در این مورد کاملاً مشابه جوابِ معادلاتِ (I) خواهد بود. این‌جا $\frac{1}{2}n^*$ به جای k ظاهر می‌شود، و باید m (طبقِ نمادگذاریِ بخشِ §2، معادلاتِ (15) و (16)) را با اعدادِ $\frac{1}{2}n^* - n_1$ و $\frac{1}{2}n^* - n_2$ جای‌گزین کنیم که می‌تواند از $-\frac{1}{2}n^*$ تا $+\frac{1}{2}n^*$ تغییر کند. آن‌گاه

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{F}_{1\|})^{n_1}_{n_1} = \tfrac{1}{2}n^* - n_1, \quad (\mathfrak{F}_{2\|})^{n_2}_{n_2} = \tfrac{1}{2}n^* - n, \\ &\qquad\qquad 0 \leqq n_1 \leqq n^*, \quad 0 \leqq n_2 \leqq n^*, \\ &E_1 = (\tfrac{1}{2}n^* - n_1)\,\omega_1 h + (\tfrac{1}{2}n^* - n_2)\,\omega_2 h \\ &\qquad\qquad (\omega_1 = |\mathfrak{o}_1|, \quad \omega_2 = |\mathfrak{o}_2|), \end{aligned} \tag{84}$$

را به دست می‌آوریم. تصویرِ $\mathfrak{F}_{1\perp}$ و $\mathfrak{F}_{2\perp}$ به ترتیب روی صفحاتِ عمود بر جهت‌های $\mathfrak{o}_1$ و $\mathfrak{o}_2$، نوساناتِ دایروی را توصیف می‌کنند و بنابراین با ماتریس‌هایی نشان داده شده‌اند که مشابه ماتریس‌های توصیف‌شده در (56) برای P_x و P_y هستند (که در آن‌ها باید k را با $\frac{1}{2}n^*$ و m را با $\frac{1}{2}n^* - n_1$ یا $\frac{1}{2}n^* - n_2$ جای‌گزین کنیم؛ $\mathfrak{F}_\perp^2$ به مجموعِ P_x^2 و P_y^2 مربوط است):

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}_{1\perp}{}^{n_1}_{n_1+1}|^2 &= \tfrac{1}{2}(n_1 + 1)(n^* - n_1), \\ |\mathfrak{F}_{2\perp}{}^{n_2}_{n_2+1}|^2 &= \tfrac{1}{2}(n_2 + 1)(n^* - n_2). \end{aligned} \tag{85}$$

در نتیجه معادلاتِ (81) و (82) به درستی برقرار بوده و چون، مشابه با (57) داریم

$$(\mathfrak{F}_1^2)^{n_1}_{n_1} = (\mathfrak{F}_2^2)^{n_2}_{n_2} = \tfrac{1}{2}n^*(\tfrac{1}{2}n^* + 1),$$

پس معادله‌ی (83) هم با مقادیرِ انرژیِ (68) برآورده می‌شود.

بدین ترتیب همه‌ی نتایجِ بخشِ §2 از مکانیکِ جدید به دست آمدند.

6. در موردِ رابطه‌ی بینِ طیفِ هیدروژن و طیفِ قلیایی‌ها

قبلاً در بخشِ §2 اشاره شد که اصلاحاتِ اعمال شده در اصولِ پایه‌ی مکانیکِ کوانتومیِ جدید که هنوز برای توضیحِ اثراتِ نابهنجارِ زیمان لازم هستند، ممکن است حتی در موردِ اتم‌های با یک الکترونِ منفرد هم ضروری باشند؛ به خصوص این نتیجه را که حالتِ پایه‌ی چنین اتمی باید غیرِ مغناطیسی باشد، ممکن است نتوان به طورِ کامل به عنوانِ یک حکمِ قطعی پذیرفت. اخیراً گودسمیت و اولن‌بک [1] ، با هدفِ وارد کردنِ اثرِ نابهنجارِ زیمان، پیشنهادِ خاصی ارائه داده‌اند. مطابقِ این پیشنهاد، الکترون دیگر یک بارِ نقطه‌ای به حساب نمی‌آید، بلکه در عوض یک محورِ مرجح، یک تکانه‌زاویه‌ایِ مرجح و مغناطشِ (با نابهنجاریِ دوگانه) مربوط به آن دارد. این که آیا این فرضیه، در ترکیب با مکانیکِ‌کوانتومیِ جدید، برای توصیفِ تمامِ نتایجِ تجربی کافی است یا نه، احتمالاً وقتی معلوم می‌شود که محاسباتِ ساختارِ ریزِ نسبیتی بر پایه‌ی مکانیکِ جدید انجام گرفته باشد. فعلاً این محاسبه را کنار می‌گذاریم، زیرا هنوز نتوانسته‌ایم کمیتِ ضروریِ میانگینِ زمانیِ $\overline{\mathbf{1}/r^2}$ را محاسبه کنیم.

با این حال، مستقل از در نظر گرفتنِ هر مدلِ خاصی، وسوسه می‌شویم که بپرسیم آیا در جایی که نیروی مرکزیِ وارد بر الکترون از سوی بقیه‌ی اتم به صفر می‌رود، یا متناظر با آن در جایی که اعدادِ پوشاننده به صفر میل می‌کنند (به طوری که ترازهای تشکیل‌دهنده‌ی یک دوتاییِ پوشانده بر هم منطبق می‌شوند)، می‌توان طیفِ هیدروژن (شاملِ ساختارِ ریز و اثرِ میدان‌های خارجی) را یک حالتِ حدّی از طیفِ قلیایی‌ها یا طیفِ اشعه‌ی X در نظر گرفت یا نه[2]. در آن صورت ساختارِ ریزِ خطوطِ بالمر با آن‌چه توسطِ نظریه‌ی اولیه پیش‌بینی می‌شد باید تفاوت داشته باشد. این تفاوت نه در مکانِ حالت‌های انرژی و مؤلفه‌های خط، بلکه در شدت‌هایشان وجود دارد: به جای شرطِ گزینشِ $\Delta k = \pm 1$، اکنون قاعده‌ی گزینشِ $\Delta j = 0, \ \pm 1$ را داریم، که وجودِ مؤلفه‌هایی که در نظریه‌ی قبلی ممنوع بودند را مجاز می‌شمارد. گودسمیت و اولن‌بک توانستند نشان دهند که نتایجِ مشاهده‌شده چنین تغییری در قاعده‌ی گزینش را کاملاً محتمل می‌سازد. اما، در عینِ حال، آن‌ها به این حقیقت توجه کردند که مشکلِ زیر در سرِ راهِ مشابه‌سازیِ کاملِ بینِ طیفِ هیدروژن و طیفِ قلیایی‌ها وجود دارد: بنابر مشاهداتِ موجود، اثرِ زیمان برای طیفِ اتم‌های تک‌الکترونی درونِ میدان‌های مغناطیسیِ (نسبت به ساختارِ ریز) ضعیف اصلاً شبیه طیفِ قلیایی‌ها نیست.

بنابراین گرچه این سؤال که رابطه‌ی گفته‌شده در بالا بینِ طیفِ هیدوژن و قلیایی را تا کجا می‌توان پی‌گرفت، را نمی‌توان حل‌شده فرض کرد، با این حال می‌توانیم خود را متقاعد کنیم که لااقل برای مواردی که در آن‌ها می‌توان ساختارِ ریزِ نسبیتی (یا دوگانه) را کنار گذاشت، همین تشابه راهنمای ما باشد. این منجر به آن می‌شود که، در میدان‌های مغناطیسی که در آن‌ها شکافتگیِ زیمان نسبت به جداییِ مؤلفه‌های ساختارِ ریز بزرگ است، فرض کنیم ترازهای انرژیِ مغناطیسی در طیفِ اتم‌های تک‌الکترونی، تا جایی که به تعداد و مکانِ این ترازها مربوط است، با جملاتِ پاشن‌ـباخ برای عناصرِ قلیایی مطابقت دارد. در نتیجه باید در حضورِ میدانِ خارجی تعدادِ حالت‌هایی که به اتمِ هیدروژن نسبت داده می‌شود دو برابرِ تعدادی باشد که در بخش‌های قبلی بر اساسِ اصولِ کنونیِ مکانیکِ کوانتومیِ جدید به دست آمد (یعنی، $2n^2$ تا حالت به جای n^2). در یک میدانِ مغناطیسیِ خارجی، به هر مقدارِ عددِ کوانتومیِ m (که بینِ $-n^*$ و $+n^*$ قرار دارد) باید دو مقدارِ انرژیِ مغناطیسیِ $(m \pm 1)o_H h$ تعلق گیرد (که o_H بسامدِ لارمور است)؛ به همین ترتیب، برای میدان‌های متعامد، هر حالتِ مشخص‌شده با n^*، n_1 و n_2 باید به دو حالت بشکافد که مقادیرِ انرژیِ آن‌ها به اندازه‌ی $\pm o_H h$ با مقادیرِ انرژیِ داده‌شده در (84) اختلاف دارند. آن‌گاه بر اساسِ اصلِ هم‌خوانی، تنها گذارهایی رخ می‌دهند که علامتِ جمله‌ی اضافیِ $\pm o_H h$ را عوض نکنند.

[1] S. A. Goudsmit and G. E. Uhlenbeck, Naturwiss. **13**, (1925), 953.

[2] S. A. Goudsmit and G. E. Uhlenbeck, Physica **5**, (1925), 266. مدت‌ها پیش، استدلال‌های مشابهی توسطِ یک نامه از طرفِ آقای اِی. لَنده به من ارائه شده بود.

ممکن است بتوان با تحقیقاتی از نوعِ تحقیقاتِ اشترن‌ـ گرلاخ روی انحرافِ باریکه‌های اتمِ هیدروژن در میدانِ مغناطیسیِ غیرِ یکنواخت، یک راهِ ممکن برای ایجادِ تمایز بینِ تعددِ جملاتِ به دست‌آمده در بخشِ پیش (که برایش حالتِ پایه‌ی اتمِ هیدروژن غیرِ مغناطیسی است) و تعدادِ در نظر گرفته‌شده در این‌جا که مشابه جملاتِ پاشن‌ـ باخِ عناصرِ قلیایی است (که در آن مقادیرِ انرژیِ $\pm o_H h$ به حالتِ پایه‌ی اتمِ هیدروژن در میدانِ مغناطیسی منسوب می‌شوند) ارائه داد.