

## شبکه‌های دنیای کوچک

ابوالفضل رمضانپور

ramzanpour@mehr.sharif.edu

### چکیده:

بسیاری از سیستم‌های واقعی را می‌توان با یک شبکه مدل‌سازی کرد که در آن رأس‌ها نمایانگر اجزای سیستم هستند و اتصال‌ها نشان‌دهنده‌ی برهمکنش بین اجزای سیستم. مطالعات انجام شده بر روی شبکه‌های واقعی (مانند شبکه‌های اجتماعی، بیولوژیکی و اینترنت) در سال‌های اخیر خصوصیات مهم و جهان‌شمول این شبکه‌ها را تا حدودی بدست داده است. می‌توان گفت که تقریباً همه‌ی شبکه‌های واقعی یک دنیای کوچک هستند، به این معنی که از هر جای شبکه می‌توان تنها با طی کردن چند اتصال به هر رأس دلخواه دیگر رسید. در این نوشته سعی می‌کنیم با استفاده از مفاهیم فیزیک آماری به معرفی شبکه‌های دنیای کوچک بپردازیم.

### مقدمه

مطالعه‌ی سیستم‌های پیچیده یکی از موضوعات اصلی مکانیک آماری و سایر شاخه‌های علمی است که با طبیعت سر و کار دارند. در این نوشته با شبکه‌های پیچیده‌ای مانند شبکه‌های اجتماعی و اینترنت سر و کار خواهیم داشت. شبکه مجموعه‌ای از تعدادی رأس و اتصال است که در آن رأس‌ها نمایش دهنده‌ی اجزای سیستم و اتصالات بین رأس‌ها بیانگر برهمکنش‌های بین آنها هستند. به عنوان مثال در یک شبکه‌ی اجتماعی افراد به عنوان رأس‌های شبکه و رابطه‌های دوستی بین آنها به عنوان اتصالات شبکه در نظر گرفته می‌شوند. آیا می‌توان مدل‌های ساده‌ای برای شبکه‌های واقعی پیشنهاد کرد که در برگیرنده‌ی ویژگی‌های اساسی این شبکه‌ها باشند؟ اصلاً ویژگی‌های اساسی یک شبکه‌ی واقعی چیست؟ به عبارتی آیا می‌توان از وجود یک تعداد ویژگی جهان‌شمول برای شبکه‌های واقعی حرف زد؟ برای مثال در مطالعه‌ی شبکه‌های واقعی به دفعات به توابع توزیعی برخوردیم خورد که رفتاری توانی از خود نشان می‌دهند، مانند تابع توزیع تعداد همسایه‌های یک رأس که به شکل  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  رفتار می‌کند. در اینجا  $P(k)$  احتمال پیدا کردن یک رأس با تعداد همسایه‌ی  $k$  است. آیا می‌توان یک ساز و کار کلی برای تولید این رفتار در شبکه‌ها یافت؟ جواب این سؤال‌ها را می‌توانید تا حدودی در مطالبی که در اینجا خواهد آمد پیدا کنید.

بطور خلاصه ساختار شبکه‌های واقعی در جایی بین ساختار یک شبکه‌ی منظم و یک شبکه‌ی کاملاً نامنظم قرار می‌گیرد، و به همین دلیل نیز تعریف و بررسی رفتارهای این شبکه‌ها کار چندان راحتی نیست. عبارت زیر می‌تواند تا حدی در تعریف شبکه‌های واقعی صادق باشد: شبکه‌های واقعی بطور موضعی یعنی در مقیاس‌های کوچک، منظم بنظر می‌رسند ولی هرچه مقیاس نگاه کردن به آنها را افزایش می‌دهیم، بیشتر به شبکه‌های نامنظم نزدیک می‌شوند.

اما جدا از این مطالب بحث شبکه‌های واقعی چگونه آغاز شد و مردم در بررسی آنها به دنبال چه می‌گردند؟ در سال ۱۹۶۷ یک روان‌شناس به نام میلگرام [1] با یک آزمایش ساده نشان داد که اگر فاصله‌ی دو دوست نزدیک (دو نفر که همدیگر را با اسم کوچک صدا می‌کنند) را ۱ بگیریم، در آن صورت با کمی اغماض، کوچکترین فاصله‌ی هر دو نفر در روی کره‌ی زمین حدود ۶ است. در حقیقت او این آزمایش را تنها در آمریکا انجام داد ولی تعمیم آن به نمونه‌های بزرگتر کار زیاد بی‌ربطی نبود. این آزمایش تعدادی نامه بطور تصادفی بین افرادی از ایالت نیراسکا پخش شد و از آنها خواسته شد تا این نامه را به یک آدرس مشخص در ایالت بوسطن بفرستند، به این شرط که در هر مرحله نامه را تنها برای یک دوست نزدیک پست کنند و از او هم بخواهند که این کار را انجام دهد تا سرانجام نامه به مقصد برسد. اگر چه تعداد زیادی از نامه‌ها هرگز به مقصد نرسیدند ولی نامه‌های رسیده به طور متوسط تنها در ۶ مرحله این مسیر را طی کرده بودند. این آزمایش نشان می‌دهد که باید کوچکترین فاصله‌ی این اشخاص نیز از همین مرتبه‌ی ۶ باشد. این پدیده، کوچک بودن دنیا نامیده شد و بعدها مشخص شد که این ویژگی اختصاص به شبکه‌های اجتماعی ندارد و تقریباً همه‌ی شبکه‌های واقعی دارای این مشخصه هستند. در حقیقت آزمایش بالا یک مسأله‌ی جهت‌یابی در شبکه‌ی اجتماعی است. جالب این که این آزمایش به تازگی هم توسط نامه‌های الکترونیکی تکرار شده و نتایج مشابهی بدست آمده است [2].

مدت‌ها بعد در سال ۱۹۹۸ واتس و اشتروگاتس [3] این رفتار شبکه‌های واقعی را در قالب یک مدل ساده به نام شبکه‌ی دنیای کوچک فورمول‌بندی کردند. آنها نشان دادند که در یک شبکه‌ی واقعی با  $N$  رأس، میانگین کوچکترین فاصله‌ی بین دو رأس دلخواه متناسب با  $\log(N)$  رشد می‌کند. علاوه بر این در یک شبکه‌ی واقعی تعداد قابل توجهی مثلث وجود دارد که آنها این ویژگی را خوشه‌ای بودن شبکه نامیدند. خوشه‌ای بودن شبکه به معنی این است که احتمال دوست بودن دو نفر که یک دوست مشترک دارند خیلی بیشتر از احتمال دوست بودن دو نفر است که بطور تصادفی انتخاب می‌شوند.

بعد از این کار گروه‌های مختلف علمی شروع به تحقیق در این زمینه کردند و شاخه‌ای بین رشته‌ای به نام شبکه‌های پیچیده بوجود آمد که فیزیکدانان آماری سهم قابل توجهی در توسعه‌ی آن داشته‌اند [4 تا 7]. اما پیچیدگی شبکه‌های واقعی را می‌توان به (۱) پیچیدگی ساختاری آنها (۲) تحول ساختاری آنها، (۳) دینامیک پیچیده‌ی هر کدام از رأس‌های شبکه به تنهایی، (۴) انواع مختلف برهمکنش بین رأس‌ها، و در نهایت به (۵) تأثیر متقابل ساختار شبکه و دینامیک رأس‌ها نسبت داد. بگذارید کمی راجع

به مفاهیم بالا صحبت کنیم. در اینجا منظور از پیچیدگی ساختاری، پیچیدگی در توصیف ساختار شبکه‌های واقعی است. از طرفی تحول ساختاری شبکه که به معنی کم و زیاد شدن رأس‌ها و یا اتصالات در شبکه است به پیچیدگی مطالعه‌ی یک شبکه‌ی واقعی می‌افزاید. به این‌ها می‌توانید رفتار پیچیده‌ی رأس‌های شبکه را نیز اضافه کنید، مخصوصاً اگر این رأس‌ها موجودات پیچیده‌ای مانند انسان باشند. اما در یک شبکه مانند شبکه‌ی عصبی مغز انسان، برهمکنش‌ها نیز می‌توانند انواع مختلفی داشته باشند. دو نورون (سلول عصبی) می‌توانند باعث تحریک و یا جلوگیری از تحریک یکدیگر شوند. و بالاخره اینکه حالت رأس‌ها می‌تواند بر ساختار شبکه تأثیر بگذارد. باز هم می‌توانید مثال شبکه‌ی عصبی را در نظر بگیرید که در آن همزمانی فعالیت دو نورون می‌تواند باعث افزایش شدت اتصال بین آن دو شود. بطور کلی کارهای انجام شده در این زمینه را می‌توان در دو دسته جای داد:

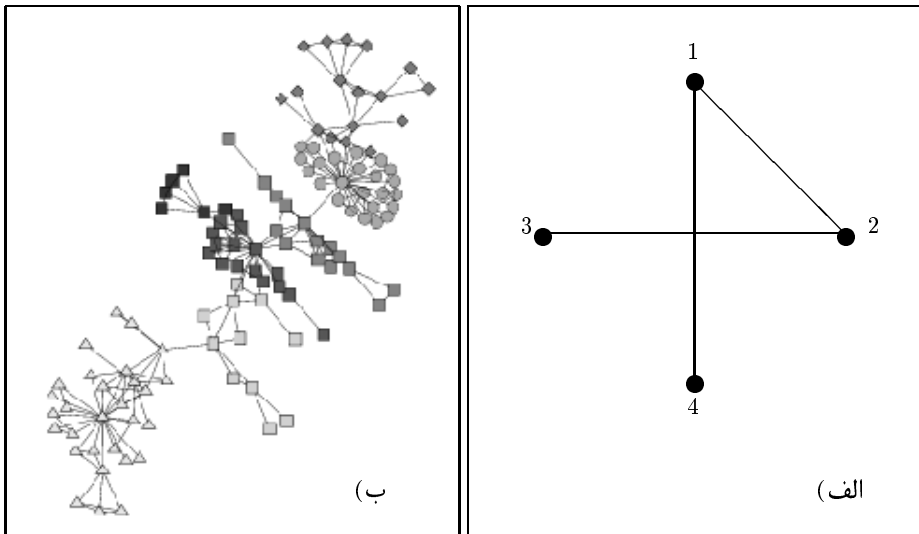
(۱) جمع آوری اطلاعات از شبکه‌های واقعی و طراحی مدل‌های ساده برای آنها، که در عین سادگی ویژگی‌های اساسی آنها را نیز شامل باشند.

(۲) مطالعه‌ی رفتار دسته جمعی سیستمی از ذرات که بر روی رأس‌های شبکه قرار داده شده‌اند و از طریق اتصالات با یکدیگر برهمکنش می‌کنند.

از نظر مهندسی، هدف از این مطالعات را می‌توان در طراحی، ساخت و کنترل شبکه‌های پیچیده‌ای مانند اینترنت، شبکه‌ی جهانی وب سایت‌ها (WWW) و انواع شبکه‌های توزیع انرژی و حمل و نقل دانست. این هدف توسط بیولوژیست‌ها نیز در مطالعه‌ی شبکه‌های سوخت و ساز سلولی، شبکه‌های پروتئینی و ژنتیکی دنبال می‌شود. از نقطه نظر فیزیکی نیز ما بیشتر علاقه‌مند به پیدا کردن ویژگی‌های جهانشمول این شبکه‌ها هستیم. یعنی دنبال مدل‌های ساده‌ای هستیم که دربرگیرنده‌ی خصوصیات اصلی شبکه‌های واقعی باشند، و همچنین دنبال روابط کلی بین رفتارهای متنوع سیستم‌های برهمکنش‌دار در یک شبکه‌ی پیچیده و تأثیر ساختار بر روی این رفتارها هستیم. اکنون می‌دانیم که علاوه بر کوچک بودن و خوشه‌ای بودن شبکه‌های واقعی، ویژگی‌های مهم دیگری مانند تابع توزیع تعداد همسایه‌های یک رأس و انواع همبستگی‌ها (مانند همبستگی تعداد همسایه‌های دو رأس که با یکدیگر همسایه هستند) نیز نقش بسزایی در رفتار این سیستم‌ها ایفا می‌کنند.

## شبکه‌های واقعی و مدل‌هایی برای آنها

بطور کلی ساختار شبکه‌ای از  $N$  رأس را ماتریس  $A := \{a_{ij} | i, j = 1 \dots N\}$  که به آن ماتریس همسایگی می‌گوییم مشخص می‌کند. عنصر  $(ij)$  این ماتریس نشان‌دهنده‌ی نوع ارتباط بین دو رأس  $i$  و  $j$  است. در یک شبکه‌ی ساده، ماتریس همسایگی متقارن است و عناصر ماتریس تنها مقادیر  $\{0, 1\}$  را اختیار می‌کنند. به عبارتی  $a_{ij} = 1$  اگر یک اتصال رأس  $i$  را به  $j$  وصل کند و در غیر اینصورت  $a_{ij} = 0$ . واضح است که در یک شبکه با اتصالات جهت‌دار ماتریس همسایگی لزوماً متقارن نیست. به علاوه در حالت کلی اتصالات می‌توانند وزن‌دار باشند و یا اتصالی یک رأس را به خودش وصل کند. به عنوان



شکل ۱: الف) یک شبکه‌ی ساده که ماتریس همسایگی آن در متن نمایش داده شده است. ب) شبکه‌ی همکاری علمی افراد در یک مرکز تحقیقاتی.

مثال ماتریس همسایگی زیر نمایانگر شبکه‌ی ساده‌ای است که در شکل ۱-الف نشان داده شده است.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

حال با این تصویر کلی از یک شبکه، بگذارید به معرفی چند شبکه‌ی واقعی مهم بپردازیم.

الف) شبکه‌های اجتماعی :

همانطور که گفتیم این نوع شبکه‌ها اولین شبکه‌های واقعی هستند که مورد توجه بوده‌اند. در این شبکه‌ها رأس‌ها می‌توانند نمایانگر یک فرد یا گروهی از افراد جامعه باشند و اتصالات بین این افراد یا گروه‌ها می‌توانند نشان‌دهنده‌ی ارتباط نزدیک آنها باشند. مثلاً اگر بررسی انتشار یک شایعه یا بیماری مورد توجهی ما است، شبکه‌ی اجتماعی ما را افراد جامعه می‌سازند که بین هر دو دوست نزدیک یک اتصال گذاشته‌ایم. بیماری به احتمال زیاد از طریق این اتصالات منتقل می‌شود. نکته‌ی جالب در مورد شبکه‌های واقعی و بطور خاص شبکه‌های اجتماعی، ضریب خوشگویی بزرگ آنها است. به عبارتی در این شبکه‌ها احتمال دوست بودن دو نفر که دوست مشترکی دارند خیلی بیشتر از این احتمال در شبکه‌های تصادفی معادل آنها است. ما این احتمال را ضریب خوشگویی شبکه می‌نامیم. روشن است که این کمیت با تعداد مثلث‌های موجود در شبکه متناسب است. در جدول ۱ می‌توانید ضریب خوشگویی چند شبکه‌ی

	$N$	$C$	$C_r$	$\langle l \rangle$	$\langle l \rangle_r$
اینترنت	3015	0.18	0.001	3.7	6.3
WWW	153127	0.1	0.0002	3.1	3.35
شبکه عصبی <i>C. elegans</i>	282	0.28	0.5	2.65	2.28
شبکه غذایی Silwood	154	0.15	0.03	3.4	3.23
شبکه همکاری ریاضی دان‌ها	70975	0.59	0.00005	9.5	8.2

جدول ۱: مقایسه‌ی چند شبکه واقعی با معادل تصادفی آنها.

واقعی را با مقادیر آنها در شبکه‌های تصادفی معادل مقایسه کنید. یک شبکه‌ی تصادفی معادل شبکه‌ای است با همان تعداد رأس و اتصال که در آن اتصالات بطور کاملاً تصادفی پخش شده‌اند. داده‌های این جدول از مرجع [5] گرفته شده‌اند. در این جدول  $N$  اندازه‌ی شبکه،  $C$  و  $\langle l \rangle$  نیز به ترتیب ضریب خوشگی و میانگین کوچکترین فاصله در شبکه هستند. به همین ترتیب  $C_r$  و  $\langle l \rangle_r$  مقادیر متناظر در شبکه‌های تصادفی معادل هستند. در این جدول *Caenorhabditis elegans* یک موجود زنده و Silwood یک اکوسیستم یا شبکه‌ی غذایی است.

از طرفی همان طور که در بالا دیدیم آزمایش میلگرام نشان می‌دهد که در شبکه‌های اجتماعی جهت‌یابی کار ساده‌ای است. در حقیقت برای رساندن یک نامه به شخصی که نمی‌شناسیم تنها احتیاج به تعداد کمی واسطه داریم. این امر نشان دهنده‌ی وجود مسیرهای کوچکی بین ما و یک فرد دلخواه از شبکه است. اما دقت کنید که پیدا کردن مسیرهای کوچک در یک شبکه نیاز به اطلاعاتی سرتاسری از شبکه دارد در حالی که در فرستادن یک نامه تنها اطلاعاتی موضعی در اختیار داریم. به عبارتی ما تنها دوستان خود و در بهترین حالت دوستان دوستان خود را می‌شناسیم. در حقیقت وجود مسیرهای کوچک در شبکه لزوماً به معنی جهت‌یابی آسان در آن، آن هم تنها با استفاده از اطلاعات موضعی، نیست. این ساختار ویژه‌ی شبکه‌های اجتماعی است که به ما اجازه‌ی می‌دهد به راحتی در آن جهت‌یابی کنیم [9]. جدای از این مطالب، داده‌ها نشان می‌دهد که شبکه‌های اجتماعی متمایزتر از باقی شبکه‌های واقعی هستند. این تمایز بخاطر نقش برجسته‌ی ساختار گروهی در این نوع شبکه‌ها است. ساختار گروهی یک شبکه با تعیین گروه‌های شرکت‌کننده در آن مشخص می‌شود. یک گروه را نیز می‌توان با تعداد زیاد اتصالات در بین اعضای آن نسبت به سایر اعضای شبکه تعریف کرد. دیده می‌شود که تابع توزیع اندازه‌ی گروه‌ها بطور توانی رفتار می‌کند. به عبارتی اگر  $P(m)$  تعداد گروه‌های موجود در شبکه با اندازه‌ی  $m$  باشد آنگاه  $P(m) \sim m^{-\tau}$ . نکته‌ی جالب دیگر در مورد شبکه‌های اجتماعی خود متشابه بودن ساختار گروهی در این شبکه‌ها است. این به معنی آن است که از نظر آماری طرز گروه‌بندی افراد در مقیاس‌های مختلف یکسان است. یعنی افراد همان طور که در دانشکده در گروه‌های مختلف جای می‌گیرند، به همان طریق هم در دانشگاه گروه‌بندی می‌شوند و همان طور هم در جامعه. در شکل

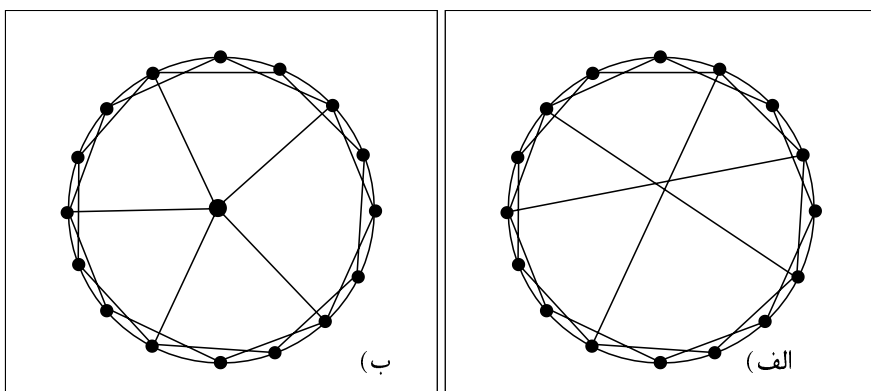
۱- ب یک شبکه‌ی کوچک را که از همکاری علمی افراد یک مرکز تحقیقاتی در آمریکا ساخته شده است، می‌بینید. رأس‌های این شبکه محققان آن مرکز هستند و یک اتصال بین دو رأس نشان می‌دهد که دو محقق مورد نظر در حداقل یک مقاله‌ی علمی با یکدیگر همکاری داشته‌اند. این شکل از مرجع [6] گرفته شده است. همانطور که در شکل می‌بینید گروه‌های علمی مختلف کاملاً از یکدیگر متمیز داده می‌شوند.

(ب) شبکه اینترنت و WWW :

اینترنت شبکه‌ای از کامپیوترها است که توسط اتصالات فیزیکی به یکدیگر وصل شده‌اند. این شبکه ساختاری را می‌سازد که مردم می‌توانند از طریق آن اطلاعات خود را جابجا کنند و از این نظر بررسی آن می‌تواند کمک زیادی در حفظ امنیت آن، طراحی قسمت‌هایی از آن و یا طراحی الگوریتم‌هایی برای جستجوی اطلاعات کند. این شبکه را می‌توان در دو سطح مختلف نگاه کرد: شبکه‌ای از راه‌یاب‌ها و یا شبکه‌ای از سیستم‌های مستقل (مجموعه‌ای از راه‌یاب‌ها که دارای یک برنامه‌ی مستقل برای انتقال اطلاعات هستند). تحول یکی از ویژگی‌های بارز این شبکه است. در طی زمان رأس‌ها و اتصالات به شبکه اضافه می‌شوند. اینترنت از این نظر یک شبکه‌ی شتابدار است به این معنی که تعداد اتصالات شبکه سریعتر از تعداد رأس‌ها رشد می‌کند. در حقیقت اینترنت ساختاری را فراهم می‌کند تا شبکه‌ی جهانی وب سایت‌ها (WWW) بر روی آن شکل بگیرد. در این شبکه هر رأس یک وب سایت را نشان می‌دهد و اگر بتوانید از یک وب سایت توسط یک اتصال به وب سایت دیگری بروید بین آنها یک اتصال جهت‌دار می‌گذاریم که پیکان آن به وب سایت دوم اشاره می‌کند. پیدا کردن ساز و کارهایی برای جستجوی اطلاعات در این شبکه از مهمترین برنامه‌هایی است که دنبال می‌شود.

(ج) شبکه‌های بیولوژیکی :

بگذارید در اینجا تنها راجع به شبکه‌های پروتئینی که نوعی از شبکه‌های بیولوژیکی هستند حرف بزنیم. در یک شبکه‌ی پروتئینی رأس‌ها نماینده‌ی پروتئین‌های مختلف یک موجود زنده‌اند. اتصال بین دو پروتئین نشان می‌دهد که آنها بطور فیزیکی با یکدیگر برهمکنش می‌کنند، یعنی در مجاورت یکدیگر به هم می‌چسبند. پروتئین‌ها از این برهمکنش‌ها برای انتقال اطلاعات و فعال یا غیر فعال کردن یکدیگر استفاده می‌کنند. علاوه بر این، دانستن ساختار این شبکه می‌تواند ما را در یافتن وظیفه‌ی پروتئین‌های ناشناخته، اهمیت پروتئین‌ها و حتی در ساخت دارو، کمک کند. یک بررسی نشان می‌دهد که احتمال حیاتی بودن پروتئین‌های با تعداد همسایه‌های زیاد حدود سه برابر بزرگتر از این احتمال برای پروتئین‌های دیگر است [10]. در ضمن از آنجا که پروتئین‌های هم وظیفه (یا هم خانواده) با احتمال بیشتری به یکدیگر وصل هستند، می‌توان روش‌هایی آماری برای تعیین وظیفه‌ی پروتئین‌های جدید هم پیشنهاد کرد. بعضی از بیماری‌ها به خاطر نقص‌های پروتئینی شکل می‌گیرند. تشخیص و درمان بیماری تا جایی که منشأ آن یک پروتئین باشد، شاید کار زیاد مشکلی نباشد. با این همه منشأ یک بیماری می‌تواند فراتر از این باشد. به عنوان مثال یک تغییر ساختار در شبکه‌ی برهمکنشی پروتئین‌ها



شکل ۲: الف) یک مثال نوعی از شبکه‌ی دنیای کوچک. ب) شبکه‌ی کوچکترین دنیای کوچک.

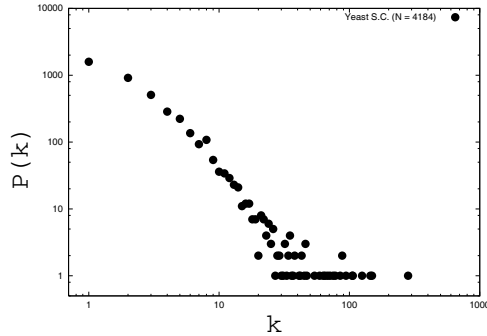
می‌تواند عامل یک بیماری پیچیده باشد در حالی که تمام پروتئین‌ها سالم هستند. به عبارتی تغییر یک پروتئین ممکن است اختلالی در انجام وظایف شخصی آن پروتئین ایجاد نکند در حالی که همین تغییر می‌تواند باعث اختلال در رفتارهای دسته جمعی شود. در اینجا شناخت ویژگی‌های سرتاسری یک موجود زنده و از جمله شبکه‌ی پروتئینی آن می‌تواند مفید باشد. یک نکته‌ی اساسی که به تازگی مورد توجه قرار گرفته این است که پروتئین‌ها به صورت گروهی کار می‌کنند. یعنی چند پروتئین جمع می‌شوند و تشکیل یک ماشین پروتئینی می‌دهند. آزمایش‌های جدید ما را قادر می‌سازد تا بتوانیم خیلی سریع و با دقت خوبی این ماشین‌ها را از درون یک سلول استخراج کنیم. با این حساب بنظر می‌رسد که تصویر شبکه‌ی پروتئینی که در بالا توضیح دادیم باید با این تصویر جدید جایگزین شود. در این تصویر شبکه‌ای از پروتئین‌ها داریم که بین آنها علاوه بر برهمکنش‌های دوتایی، برهمکنش‌های چندتایی هم وجود دارند. هر برهمکنش چندتایی نشان دهنده‌ی یک ماشین پروتئینی است [11].

همان طور که در بالا دیدیم کوچک بودن و ضریب خوشگویی بزرگ دو ویژگی مهم شبکه‌های واقعی هستند. مردم از قبل می‌دانند که شبکه‌های تصادفی دارای ویژگی اول هستند ولی ضریب خوشگویی آنها برای شبکه‌های بزرگ تقریباً صفر است. یک شبکه‌ی تصادفی با پخش تصادفی یک تعداد اتصال در بین رأس‌های شبکه بدست می‌آید. از طرفی ما می‌توانیم شبکه‌هایی منظم با ضریب خوشگویی بزرگ داشته باشیم در حالی که میانگین کوچکترین فاصله‌ی بین دو رأس دلخواه در این شبکه‌ها خیلی زیاد است و در حقیقت با  $N$ ، اندازه‌ی شبکه، متناسب است. در نتیجه انتظار داریم که ترکیبی از شبکه‌های تصادفی و منظم بتواند این دو ویژگی را برای ما بازتولید کند. این همان مدلی است که واتس و اشتروگاتس معرفی کرده‌اند. شکل ۲ - الف یک چنین ساختاری را نشان می‌دهد. در این شکل  $N$  رأس بر روی یک حلقه قرار گرفته‌اند. هر رأس بر روی حلقه به دو رأس از سمت راست و دو رأس از

سمت چپ خود وصل شده است. می‌توانید تعداد همسایه را هر عددی که دوست دارید بگیرید. به این ترتیب در حالی که هنوز شبکه منظم است ضریب خوشگی شبکه مقدار قابل توجه‌ای به خود می‌گیرد. حال به ازای هر اتصال موجود با احتمال  $p$  یک اتصال تصادفی به شبکه اضافه می‌کنیم. بررسی تحلیلی مدل نشان می‌دهد که برای شبکه‌های بزرگ حتی با مقادیر خیلی کوچک برای  $p$  (در حدود  $1/N$ ) نیز میانگین فاصله‌ی بین دو رأس دلخواه با  $\log N$  متناسب است. و این همان چیزی است که انتظار داریم. اگر یادتان باشد واتس و اشتروگاتس همین رفتار را در شبکه‌های واقعی هم دیده بودند.

بگذارید فرض کنیم به ما تعدادی اتصال تصادفی داده‌اند و از ما می‌خواهند آنها را طوری بین رأس‌ها پخش کنیم که میانگین کوچکترین فاصله‌ی بین دو رأس دلخواه کمترین مقدار خودش را بگیرد. بطور شهودی پیداست که برای این منظور کافی است تمام اتصالات را از یک مرکز و بطور کاملاً تصادفی بین رأس‌های شبکه پخش کنیم. ما این شبکه را کوچکترین دنیای کوچک می‌نامیم و شکل ۲ - ب این شبکه را نشان می‌دهد. علاوه بر حالت بهینه‌ی گفته شده، این شبکه از این جهت برای ما اهمیت دارد که به ما اجازه می‌دهد بطور دقیق به بررسی تحلیلی آن بپردازیم [11 و 12]. حل‌های دقیق علاوه بر ارائه‌ی تصویری روشن از مسأله امکانی برای بررسی دقت روش‌های تقریبی نیز در اختیار ما می‌گذارند. بگذارید کمی هم به اهمیت رأس‌ها در شبکه بپردازیم. در نگاه اول بنظر می‌رسد که هر چه تعداد همسایه‌های یک رأس بیشتر باشد نقش مهمتری در شبکه بازی خواهد کرد. ما تعداد همسایه‌های یک رأس را درجه‌ی آن می‌نامیم. تابع توزیع درجه‌ی رأس‌ها در یک شبکه، اطلاعاتی از توزیع اهمیت رأس‌ها در شبکه به ما خواهد داد. داده‌های گرفته شده از شبکه‌های واقعی نشان داده است که در بیشتر شبکه‌های واقعی این تابع توزیع به شکل توانی افت پیدا می‌کند [5]. به عبارتی اگر  $P(k)$  تعداد رأس‌های با درجه‌ی  $k$  در شبکه باشد داریم  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  که در شبکه‌های واقعی  $\gamma$  مقداری بین 2 و 3 به خود می‌گیرد. در شکل (۵) ما  $P(k)$  را برای یک شبکه‌ی برهمکنش پروتئینی نشان داده‌ایم. اما به راحتی می‌توان دید که مدل‌های معرفی شده در بالا این ویژگی را از خود نشان نمی‌دهند بلکه در آنها  $P(k)$  برای  $k$  های بزرگ به شکل نمایی افت می‌کند. در نتیجه ما نیاز به مدل‌هایی داریم که بتوانیم انواع تابع توزیع درجه را در آنها داشته باشیم. یک راه ساده برای این کار روش زیر است: به هر رأس شبکه یک عدد صحیح نسبت می‌دهیم که از تابع توزیع دلخواه  $P(k)$  می‌آید. سپس به هر رأس مطابق با عدد صحیح نسبت داده شده تعدادی رشته نخ آزاد وصل می‌کنیم. حال در هر مرحله دو نخ آزاد را بطور تصادفی از میان نخ‌های آزاد انتخاب می‌کنیم و به یکدیگر گره می‌زنیم. آنقدر این کار را ادامه می‌دهیم تا تمام نخ‌های آزاد تمام شوند. به این ترتیب در نهایت ما یک شبکه‌ی تصادفی با تابع توزیع درجه‌ی  $P(k)$  خواهیم داشت. اگرچه این شبکه‌ها یک دنیای کوچک هستند، ولی ضریب خوشگی آنها در حالتی که مقدار میانگین تعداد همسایه‌ها متناهی است، بصورت  $1/N$  به سمت صفر می‌رود. نگران نباشید چرا که روش‌هایی وجود دارد که می‌شود این مشکل را نیز برطرف کرد. برای مثال بگذارید به روش زیر اشاره کنیم [11]. در حقیقت تبدیلی وجود دارد که با آن می‌توان حتی از شبکه‌های

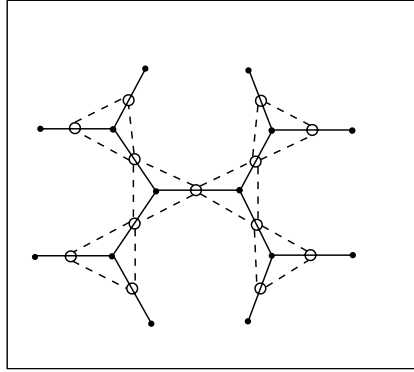




شکل ۳: تابع توزیع درجه‌ی راس‌ها در یک شبکه‌ی برهمکنش پرتویی.

درختی که در آنها ضریب خوشگی صفر است یک شبکه با ضریب خوشگی قابل ملاحظه بدست آورد. ما به این شبکه‌ی جدید همزاد اتصالی شبکه‌ی اصلی می‌گوییم. برای ساخت همزاد اتصالی یک شبکه‌ی داده شده کافی است ابتدا بر روی هر اتصال شبکه‌ی اصلی یک رأس شبکه‌ی همزاد را تعریف کنیم. سپس ما هر دو رأس شبکه‌ی همزاد که بر روی دو اتصال منتهی به یک رأس در شبکه‌ی اصلی هستند را به یکدیگر وصل می‌کنیم. شکل ۴ همزاد اتصالی یک شبکه را بر روی آن نشان می‌دهد. در ضمن مطالعه‌ی شبکه‌های همزاد اتصالی نشان می‌دهد که همزاد اتصالی یک شبکه‌ی تصادفی با تابع توزیع درجه‌ی  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  شبکه‌ای خواهد شد که در آن تابع توزیع تعداد همسایه‌ها به شکل  $\bar{P}(k) \sim k^{-(\gamma-1)}$  است [11].

اما دقت کنید که این روش‌های بالا هیچ توضیحی راجع به این که چرا شبکه‌های واقعی دارای تابع توزیعی توانی هستند نمی‌دهند و تنها مدل‌هایی را در اختیار ما می‌گذارند که می‌توانیم از آنها برای کارهای بعدی، مانند شبیه‌سازی سیستم‌هایی که بر روی شبکه تعریف شده‌اند، استفاده کنیم. اما واقعاً چطور شبکه‌های واقعی می‌توانند توابع توزیعی با رفتار توانی تولید کنند؟ برای این منظور ما در اینجا به یکی از مهمترین سازوکارهای مربوط اشاره می‌کنیم [13]. دیده می‌شود که خیلی از رفتارهای توانی بطور مستقیم یا غیر مستقیم از این سازوکار سرچشمه می‌گیرند. بگذارید با تعداد کمی رأس شروع کنیم که بطور تصادفی با تعدادی اتصال به یکدیگر وصل شده‌اند. ما تعداد این رأس‌ها را  $m_0$  می‌گیریم. حال در هر مرحله یک رأس جدید وارد شبکه می‌شود که  $m \leq m_0$  اتصال آزاد دارد. این رأس جدید هر اتصال آزادش را با احتمال  $\pi_i \sim k_i$  به رأس  $i$  ام موجود در شبکه وصل می‌کند که در اینجا  $k_i$  درجه‌ی رأس  $i$  ام در زمانی است که رأس جدید وارد شده است. ما این نوع رشد شبکه را رشد ترجیحی می‌گوییم چرا که رأس جدید ترجیح می‌دهد به رأس‌هایی وصل شود که تعداد همسایه‌های بیشتری دارند. با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که مدل تحولی بالا شبکه‌هایی با تابع توزیع درجه‌ای به شکل  $P(k) \sim k^{-3}$  تولید می‌کند. تعمیم‌های مناسب این مدل می‌توانند نماهای مختلفی را برای  $P(k)$  بدست دهند.



شکل ۴: شبکه‌ی همزاد اتصالی یک شبکه داده شده. راس‌های شبکه‌ی همزاد با دایره‌های توخالی و اتصالات آن با خط چین نشان داده شده‌اند.

تا اینجا بیشتر توجه ما معطوف به ساختار شبکه بود. اما رفتار سیستم‌ها بر روی چنین ساختارهایی چگونه است؟ بگذارید بطور خلاصه بگوییم که ما انتظار داریم رفتار سیستم‌ها بر روی شبکه‌های دنیای کوچک تا حدی شبیه به رفتار آنها بر روی شبکه‌های منظم با بعد بینهایت باشد. در حقیقت بعد مؤثر شبکه‌های دنیای کوچک بینهایت است. یکی از انواع مختلف بعد مؤثر را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد. اگر تعداد رأس‌هایی که در فاصله‌ای کمتر از  $r$  از یک رأس دلخواه قرار دارند را  $V(r)$  بنامیم، در شبکه‌های منظم این تابع برای  $r$ های بزرگ به شکل  $V(r) \sim r^d$  رفتار می‌کند. در نتیجه با تشابه با این حالت می‌توان بعد مؤثر را برای یک شبکه‌ی دلخواه نیز بدست آورد. از طرفی بخاطر ویژگی دنیای کوچک، انتظار داریم که در شبکه‌های دنیای کوچک  $V(r)$  به شکل نمایی با  $r$  رشد کند. از آنجا که یک رفتار نمایی را با هیچ رفتار توانی با بعد مؤثر متناهی نمی‌توان توضیح داد به این نتیجه می‌رسیم که بعد مؤثر شبکه‌های دنیای کوچک باید بینهایت باشد. با این همه باید گفت که رفتار دسته‌جمعی سیستمی که بر روی یک شبکه‌ی دنیای کوچک با  $P(k)$  دلخواه تعریف شده است خیلی هم شبیه رفتار آن در یک شبکه‌ی منظم با بعد بینهایت نیست. به عبارتی روش‌های میدان متوسط در اینجا نیز حل دقیق مسأله را می‌دهند. روش‌های میدان متوسط روش‌هایی که در آن‌ها از افت و خیزهای مربوط صرف نظر می‌شود و در شبکه‌های منظم با بعد بینهایت نتایج دقیق را بدست می‌دهند. با این همه لازم به ذکر است که وجود ناهمگنی در شبکه که خودش را در تابع توزیع  $P(k)$  نشان می‌دهد می‌تواند رفتار سیستم را به شدت از آنچه در شبکه‌های منظم با بعد بینهایت می‌بینیم منحرف کند [6].

- [1] S. Milgram: The small world problem, *Psychology Today*, vol. 2, pp. 60-67 (1967).
- [2] P. S. Dodds, R. Muhamad, D. J. Watts: An experimental study of social search and the small-world problem, *Science*, vol. 301, p. 827 (2003).
- [3] D. J. Watts, S. H. Strogatz: Collective dynamics of small-world networks, *Nature*, vol. 393, pp. 440-442 (1998).
- [4] S. H. Strogatz: Exploring complex networks, *Nature*, vol. 410, pp. 268-276 (2001).
- [5] R. Albert, A.-L. Barabasi: Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, pp. 47-97 (2002).
- [6] M. E. J. Newman: The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, vol. 45, p. 167 (2003).
- [7] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes: Evolution of networks, *Advances in Physics*, vol. 51, pp. 1079-1187 (2002).
- [9] J. Kleinberg: Navigation in a small world, *Nature*, vol. 406, p. 845 (2000).
- [10] H. Jeong, S. P. Mason, A.-L. Barabasi, Z. N. Oltvai: Lethality and centrality in protein networks, *Nature* vol. 411, pp. 41-42 (2001).
- [11] ابولفضل رمضانپور، فیزیک آماری شبکه‌های دنیای کوچک، رساله‌ی دکتری، دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، فروردین ۱۳۸۳.
- [12] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes: Exactly solvable analogy of small-world networks, *Europhysics Letters*, vol. 50, pp. 1-7 (2000).
- [13] A.-L. Barabasi, R. Albert: Emergence of scaling in random networks, *Science*, vol. 286, pp. 509-512 (1999).