تکینگی‌هایِ کوانتیده در میدانِ الکترومغناطیسی. ‡

پی. اِی. اِم. دیراک،
کالجِ سنت‌جان، کمبریج.

(دریافت 29 مِی 1931)

§ 1. *مقدمه.*

پیشرفتِ پیوسته‌ی فیزیک نیاز به آن دارد که ریاضیاتِ فرمول‌بندیِ نظریِ آن مدام پیشرفته‌تر شود. این طبیعی و قابلِ انتظار است. اما، چیزی که برای دانش‌پیشه‌گان قرنِ پیش قابلِ انتظار نبود شکلِ خاصی است که مسیرِ پیشرفتِ ریاضیات به خود گرفته است، این که انتظار می‌رفت ریاضیات هر چه پیچیده‌تر شود، ولی بر مبنای ثابتی از اصول و تعاریف باقی بماند، در حالی که عملاً پیشرفت‌هایِ فیزیکیِ جدید ریاضیاتی طلبیده است که پیوسته مبانی‌اش تغییر می‌کند و انتزاعی‌تر می‌شود. امروزه دریافته‌ایم که هندسه‌ی نااقلیدسی و جبرِ ناجابه‌جایی، که زمانی برای اندیشمندانِ منطق تنها تخیلاتِ ذهن و سرگرمی به حساب می‌آمد، برای توصیفِ وقایعِ عامِ دنیای فیزیکی بسیار لازم است. به نظر می‌رسد که احتمالاً این فرایندِ انتزاعی‌تر شدن در آینده ادامه یابد و پیشرفتِ فیزیک، به جای گسترشِ منطقیِ هر یک از نظام‌های ریاضی روی یک بنیادِ ثابت، با اصلاح و تعمیمِ پی‌درپیِ اصولِ زیربنائیِ ریاضیات همراه باشد.

امروزه، مسائلی بنیادی در فیزیکِ نظری منتظرِ پاسخ هستند، مسائلی مثلِ فرمول‌بندیِ نسبیتیِ مکانیکِ کوانتومی و سرشتِ هسته‌های اتمی (و در ادامه مسائلِ مشکل‌تری مثلِ مسئله‌ی حیات)، که پاسخ به آن‌ها

‡مقاله ترجمه‌ای است از:

P. A. M. Dirac, "*Quantised Singularities in the Electromagnetic Field.*",
Proceedings of the Royal Society of London A, Vol. 113, No. 821 (Sep. 1, 1931), pp. 60-72.

مترجم: مریم حاجی‌رحیمی. گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب.

احتمالاً نیاز به یک بازنگری در مفاهیمِ بنیادیِ ما دارند، اساسی‌تر از هر بازنگری‌ای که قبلاً صورت گرفته است. کاملاً محتمل است که این تغییرات چنان بزرگ باشد که دریافتِ مستقیمِ ایده‌های تازه برای صورتبندیِ داده‌های تجربی در قالب‌هایِ ریاضی فراتر از توانِ ذهنیِ بشر باشد. پس، در آینده نظریه‌پرداز مجبور است در مسیرِ غیرِ مستقیم‌تری پیش رود. قوی‌ترین روشِ پیشرفتی که فعلاً می‌توان پیشنهاد داد، به کارگیریِ همه‌ی منابعِ ریاضیِ محض در تلاش برای تکمیل و تعمیمِ فرمول‌بندیِ ریاضیاتی است که مبانیِ موجودِ فیزیکِ نظری را می‌سازد، و پس از هر موفقیت در این راستا، باید برای تعبیرِ نمودهای ریاضیِ جدید بر حسبِ مفاهیمِ فیزیکی (با کمکِ فرایندی شبیهِ اصلِ هویت‌بخشیِ ادینگتون) تلاش کرد.

مقاله‌ی اخیرِ نویسنده * را می‌توان گامِ کوچکی در راستای این طرح کلیِ پیشرفت در نظر گرفت. آن موقع، فرمول‌بندیِ ریاضی با پیش‌بینیِ مقادیرِ منفی برای انرژیِ جنبشیِ یک الکترون، با یک مشکلِ اساسی روبه‌رو شد. پیشنهاد شد که، با استفاده از اصلِ طردِ پائولی که حضورِ بیش از یک الکترون را در هر حالت مجاز نمی‌داند، این مشکل را بدین صورت حل کنیم که بگوییم در دنیای فیزیکی تقریباً همه‌ی حالت‌های انرژی‌ـمنفی پراند، طوری که الکترون‌های عادی با انرژیِ مثبت نمی‌توانند به آن حالت‌ها بروند. آن‌گاه این سؤال پیش می‌آید که تعبیرِ فیزیکیِ حالت‌های انرژی‌ـمنفی، که در این دیدگاه واقعاً وجود دارند، چیست؟ انتظار بر این است که توزیعِ حالاتِ یک‌نواخت پرشده‌ی انرژی‌ـمنفی برای ما کاملاً مشاهده‌ناپذیر باشد، اما وجودِ یک حالتِ پر نشده، که استثناست، باید به صورتِ یک نوع حفره حس شود. نشان داده شد که چنین حفره‌ای ممکن است به شکلِ یک ذره با انرژیِ مثبت و بارِ مثبت بر ما آشکار شود و پیشنهاد شد که این ذره به عنوانِ یک پروتون شناسایی شود. اما، بررسی‌های بعدی نشان داده‌اند که جرمِ این ذره باید برابرِ جرمِ الکترون باشد †، و هم‌چنین این که، اگر با یک الکترون برخورد کند، احتمالِ آن که هم را نابود کنند بیش از آن است که با پایداریِ شناخته‌شده‌ی ماده سازگار باشد ‡.

پس معلوم می‌شود که باید یکی دانستنِ حفره‌ها و پروتون‌ها را کنار بگذاریم و تعبیرِ دیگری برای آن‌ها بیابیم. به پیروی از اُپنهایمر§، می‌توانیم فرض کنیم در دنیایی که ما می‌شناسیم، *همه‌ی*، و نه فقط تقریباً همه‌ی، حالت‌های الکترون با انرژیِ منفی پر شده‌اند. حفره، اگر وجود داشته باشد، باید نوعِ جدیدی ذره، ناشناخته در فیزیکِ تجربی، با همان جرمِ الکترون و بارِ مخالفِ آن باشد. می‌توانیم چنین ذره‌ای را پادالکترون بنامیم.

---

* 'Proc. Roy. Soc.,' A, vol. 126, p. 360 (1930)

† H. Weyl, 'Gruppentheorie und Quantenmechanik,' 2nd ed. p. 234 (1931)

‡ I. Tamm, 'Z. Physik,' vol. 62, p. 545 (1930); J. R. Oppenheimer, 'Phys. Rev.,' vol. 35, p. 939 (1930); P. Dirac, 'Proc. Camb. Philos. Soc.,' vol. 26, p. 361 (1930)

§ J. R. Oppenheimer, 'Phys. Rev.,' vol. 35, p. 562 (1930)

به خاطرِ آهنگِ سریعِ بازترکیبِ آن‌ها با الکترون‌ها، انتظار نداریم هیچ یک از آن‌ها را در طبیعت بیابیم، اما اگر می‌شد آن‌ها را در آزمایشگاه در خلاءِ خیلی خوب تولید کرد، باید کاملاً پایدار و قابلِ مشاهده باشند. برخوردِ دو پرتوی گامای سخت (با انرژیِ حداقل نیم‌میلیون [الکترون] ولت) می‌تواند به تولیدِ هم‌زمانِ یک الکترون و یک پادالکترون منجر شود. اگر فرضِ کنیم که این فتون‌ها کره‌هایی هم‌اندازه با الکترون‌های کلاسیکی باشند، آن وقت احتمالِ رخ‌دادِ این فرایند از مرتبه‌ی بزرگیِ احتمالِ برخوردِ دو پرتوی گاما خواهد بود. اما، با شدت‌های پرتوی گاما که فعلاً در دسترس است، این احتمال ناچیز است.

در دیدگاهِ بالا پروتون‌ها کاملاً مستقل از الکترون‌ها هستند. احتمالاً پروتون‌ها حالاتِ انرژی‌منفی خود را دارند، که به طورِ معمول همه‌ی آن‌ها پر شده‌اند، و یک حالتِ پرنشده همانندِ یک پادپروتون ظاهر می‌شود. در حالِ حاضر، نظریه کاملاً عاجز از ارائه‌ی دلیلی برای این موضوع است که چرا باید بینِ الکترون و پروتون تفاوت وجود داشته باشد.

موضوعِ مقاله‌ی حاضر ارائه‌ی یک ایده‌ی جدید است که از بسیاری جهات با این ایده‌ی مربوط به انرژی‌های منفی مشابه است. این مقاله اساساً نه در موردِ الکترون‌ها و پروتون‌ها، بلکه درباره‌ی دلیلِ وجودِ کوچک‌ترین بارِ الکتریکی است. با آزمایش می‌دانیم که این کوچک‌ترین بار وجود دارد و دارای مقدارِ e است که به طورِ تقریبی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید *

$$\hbar c/e^2 = 137. \tag{1}$$

نظریه‌ی مطرح شده در این مقاله، که در ابتدا به نظر می‌رسد یک مقدارِ نظری برای e می‌یابد، وقتی پیدا می‌شود که دنبالِ رابطه‌ای بینِ کوچک‌ترین بارِ الکتریکی و کوچک‌ترین قطبِ مغناطیسی باشیم. این نظریه در حقیقت، تقارنی را بینِ الکتریسیته و مغناطیس نشان می‌دهد که در دیدگاه‌های کنونی کاملاً غریب است. با این حال، لازم نیست تقارن کامل باشد، همان طور که وقتی تعبیرِ اُپنهایمر را می‌پذیریم تقارنِ بینِ الکترون و پروتون اجباری نیست. بدونِ این تقارن، نسبتِ سمتِ چپِ (1)، از دیدگاهِ نظری، کاملاً تعیین‌نشده باقی می‌ماند و اگر مقدارِ تجربیِ 137 را در نظریه‌مان به کار ببریم، چنان تفاوت‌های کمّیِ بزرگی بینِ الکتریسیته و مغناطیس معرفی می‌کند که می‌توان فهمید چرا تا امروز شباهت‌های کیفیِ آن‌ها به طورِ تجربی کشف نشده‌اند.

§ 2. *فازهای انتگرال‌ناپذیر برای توابعِ موج.*

ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که حرکتِ آن با تابعِ موجِ ψ، که تابعی از x، y، z و t است، نشان داده می‌شود. شکلِ دقیقِ معادله‌ی موج و این که نسبیتی است یا نه، در نظریه‌ی حاضر مهم نیست. ψ را به شکلِ

* $\hbar$ به معنیِ ثابتِ پلانک تقسیم بر 2π است.

$$\psi = \mathrm{A}e^{i\gamma}, \tag{2}$$

می‌نویسیم که در آن A و γ توابعِ حقیقی از x، y، z و t بوده، و نمایانگرِ دامنه و فازِ تابعِ موج هستند. برای یک حالتِ معلومِ حرکتِ ذره، تابعِ ψ تعیین می‌شود، به جز یک ضریبِ عددیِ ثابت که اگر شرطِ بهنجار بودنِ ψ را اعمال کنیم، قدرمطلق‌اش یک است. بنابراین ابهام در ψ در افزودنِ احتمالیِ یک ثابتِ دل‌خواه به فازِ ψ است. پس مقدارِ γ در یک نقطه‌ی خاص معنیِ فیزیکی ندارد و تنها اختلافِ بینِ مقادیرِ γ در دو نقطه‌ی مختلف اهمیت دارد.

این بلافاصله یک تعمیم برای فرمول‌بندی پیشنهاد می‌کند. می‌توانیم فرض کنیم که γ در یک نقطه‌ی خاص مقدارِ مشخصی ندارد، بلکه تنها اختلافِ مقادیرش بینِ هر دو نقطه معین است. می‌توانیم پیشتر برویم و فرض کنیم که این اختلاف معین نیست مگر آن که دو نقطه مجاورِ هم باشند. برای دو نقطه‌ی دور از هم اختلاف فاز فقط نسبت به یک خمِ داده شده که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند معین می‌شود و در حالتِ کلی خم‌های مختلف به اختلاف فازهای متفاوت منجر می‌شوند. تغییرِ فازِ کل هنگامِ دور زدنِ یک خمِ بسته الزاماً صفر نیست.

بیایید شرایطی را بررسی کنیم که لازم‌اند تا انتگرال‌ناپذیریِ فاز به ابهام در کاربردهای نظریه منجر نشود. اگر ψ را در مزدوجِ مختلطِ آن ϕ ضرب کنیم تابعِ چگالی را می‌یابیم که مستقیماً معنیِ فیزیکی دارد. این چگالی مستقل از فازِ تابعِ موج است، پس در این مورد نامعین بودنِ فاز هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما، انواعِ کلی‌ترِ دیگری از کاربردها هم وجود دارند، که باید منظور شوند. اگر دو تابعِ موجِ مختلفِ ψ_m و ψ_n را انتخاب کنیم، ممکن است مجبور به استفاده از حاصلِ ضربِ $\phi_m\psi_n$ شویم. انتگرالِ

$$\int \phi_m\psi_n \; dx \; dy \; dz$$

یک عدد است، که مربعِ قدرمطلقِ آن معنیِ فیزیکی دارد، یعنی احتمالِ توافقِ دو حالت است. برای آن که قدرمطلقِ انتگرال معین باشد، باید اختلافِ فازِ انتگرال‌ده بینِ هر دو نقطه، چه مجاور و چه دور از هم، معین باشد، هرچند لازم نیست فازِ انتگرال‌ده در هر نقطه معین باشد. پس تغییرِ فازِ $\phi_m\psi_n$ روی یک خمِ بسته باید صفر شود. این لازم می‌دارد که تغییرِ فازِ ψ_n روی یک خمِ بسته برابر و مخالفِ تغییرِ فازِ ϕ_m و بنابراین مشابهِ تغییرِ فازِ ψ_m باشد. به این ترتیب به این نتیجه‌ی کلی می‌رسیم که: *تغییرِ فازِ تابعِ موج روی هر خمِ بسته‌ای باید برای همه‌ی توابعِ موج یکسان باشد.*

به سادگی می‌توان دید که این شرط، پس از آن که به گونه‌ای تعمیم داده شد که عدمِ قطعیت در فازِ توابعِ تبدیل و ماتریس‌های نماینده‌ی مشاهده‌پذیرها (در نمایش‌هایی که در آن‌ها x، y و z قطری هستند)

با عدمِ قطعیتِ فاز در توابعِ موج یکسان بود، یک شرطِ کافی است برای اطمینان از این که انتگرال‌ناپذیریِ فاز در همه‌ی کاربردهای نظریه به ابهامی منجر نمی‌شود. هر جا یک ψ_n ظاهر شود، که در یک ϕ_m ضرب نشده باشد، به هر صورت در یک کمیت با سرشتی مشابهِ ϕ_m ضرب خواهد شد، که به حذف شدنِ عدمِ قطعیتِ فاز منجر می‌شود، مگر یک ثابت که مهم نیست. برای مثال، اگر ψ_n بخواهد به نمایشِ دیگری تبدیل شود که، مثلاً، در آن مشاهده‌پذیرهای ξ قطری هستند، باید آن را در تابعِ تبدیلِ $(\xi|xyzt)$ ضرب کرد و روی x، y و z انتگرال گرفت. این تابعِ تبدیل همان عدمِ قطعیتِ فازِ ϕ را خواهد داشت، به طوری که فازِ تابعِ موجِ تبدیل شده، مگر در یک ثابتِ مستقل از ξ، تعیین می‌شود. دوباره، اگر ψ_n را در ماتریسِ $(x'y'z't|\alpha|x''y''z''t)$، که یک مشاهده‌پذیرِ α را نشان می‌دهد، ضرب کنیم، عدمِ قطعیتِ فازِ مربوط به ستون [که با x''، y''، z''، t مشخص شده است] عدمِ قطعیت در ψ_n را حذف می‌کند، و عدمِ قطعیتِ سطر باقی می‌ماند که عدمِ قطعیتِ لازم در تابعِ موجِ تازه‌ی $\alpha\psi_n$ را می‌دهد. اصلِ برهم‌نهی برای توابعِ موج کمی بعد توضیح داده می‌شود، و وقتی این موضوع جا افتاد، اثباتِ این که همه‌ی عملگرهای کلیِ مکانیکِ کوانتومی را می‌توان دقیقاً به نحوی به کار برد که گویی هیچ عدمِ قطعیتی در فاز وجود ندارد، کامل می‌گردد.

این نتیجه‌ی بالا که تغییرِ فاز حولِ یک خمِ بسته برای همه‌ی توابعِ موج باید یکسان باشد، بدین معنی است که این تغییرِ فاز باید توسطِ خودِ سیستمِ دینامیکی (و شاید تا حدودی هم توسطِ نمایش) تعیین شود و باید مستقل از حالتِ سیستمِ موردِ بررسی باشد. چون سیستمِ دینامیکیِ ما فقط یک ذره‌ی ساده است، معلوم می‌شود که انتگرال‌ناپذیریِ فاز باید به میدانِ نیرویی که ذره در آن حرکت می‌کند بستگی داشته باشد.

برای حلِ ریاضیِ مسئله ψ را، کلی‌تر از (2)، به صورتِ حاصلِ ضربِ

$$\psi = \psi_1 e^{i\beta}, \tag{3}$$

می‌نویسیم که ψ_1 یک تابعِ موجِ معمولی است (یعنی تابعی که در هر نقطه یک فازِ معین دارد) که قدرمطلقِ آن همه جا برابرِ قدرمطلقِ ψ است. به این ترتیب عدمِ قطعیتِ فاز در ضریبِ $e^{i\beta}$ ظاهر می‌شود. پس لازم نیست β تابعی از x، y، z، t باشد که در هر نقطه مقدارِ معینی دارد، اما β باید مشتق‌های معینِ

$$\kappa_x = \frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad \kappa_z = \frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad \kappa_0 = \frac{\partial\beta}{\partial t},$$

را داشته باشد، که در حالتِ کلی شرایطِ انتگرال‌پذیریِ $\partial\kappa_x/\partial y = \partial\kappa_y/\partial x$، و غیره را برآورده نمی‌کند. حالا، بنا بر قضیه‌ی استوکس، تغییر در فاز روی یک مسیرِ بسته از

$$\int(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{ds}) = \int(\operatorname{curl}\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{dS}), \tag{4}$$

به دست می‌آید که $\mathbf{ds}$ (یک چهاربردار) یک عنصرِ قوس از خمِ بسته و $\mathbf{dS}$ (یک شش‌بردار) یک عنصرِ سطحِ دوبعدی است که مرزش همان خمِ بسته است. ضریبِ ψ_1 اصلاً در این تغییرِ فاز ظاهر نمی‌شود.

اکنون واضح است که انتگرال‌ناپذیریِ فاز کاملاً با اصلِ برهم‌نهی سازگار است، یا، به بیانِ دقیق‌تر، اگر دو تابعِ موجِ ψ_m و ψ_n را انتخاب کنیم که تغییرِ فازِ هر دو روی هر خمِ بسته یکسان باشد، هر ترکیبِ خطی از آن‌ها $c_m\psi_m + c_n\psi_n$ هم باید همان تغییرِ فاز را حولِ هر خمِ بسته داشته باشد. زیرا هر دوی ψ_m و ψ_n را می‌توان به صورتِ (3)، با ضرایبِ یکسانِ $e^{i\beta}$ (یعنی κـ‌های یکسان) ولی ψ_1ـ‌های متفاوت، بیان کرد، طوری که ترکیبِ خطی را نیز می‌توان به همین شکل با همان $e^{i\beta}$ نوشت، و این $e^{i\beta}$ تغییرِ فاز را حولِ هر خمِ بسته بیان می‌کند. می‌توانیم از همین $e^{i\beta}$ در کار کردن با همه‌ی توابعِ موجِ سیستم استفاده کنیم، ولی مجبور به این کار نیستیم، زیرا تنها $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{\kappa}$ مشخص شده است و ما می‌توانیم برای توابعِ موجِ مختلف κـ‌هایی را به کار بریم که در گرادیانِ یک کمیتِ نرده‌ای با هم تفاوت دارند.

از (3)، رابطه‌ی

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = e^{i\beta}\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \hbar\kappa_x\Big)\psi_1, \tag{5}$$

و روابطِ مشابهِ آن برای مشتقاتِ y، z و t را می‌یابیم. نتیجه می‌گیریم که اگر ψ در هر معادله‌ی موجی، شاملِ تکانه و عمل‌گرهای انرژیِ $\mathbf{p}$ و W صدق کند، ψ_1 در معادله‌ی موجِ متناظری صدق می‌کند که در آن $\mathbf{p}$ و W به ترتیب با $\mathbf{p} + \hbar\boldsymbol{\kappa}$ و $\mathrm{W} - \hbar\kappa_0$ جایگزین شده‌اند.

فرض کنیم ψ در معادله‌ی موجِ معمولیِ یک ذره‌ی آزاد در غیابِ هرگونه میدان صدق کند. در این صورت ψ_1 در معادله‌ی موجِ معمولیِ یک ذره با بارِ $-e$ که در یک میدانِ الکترومغناطیسی با پتانسیل‌های

$$\mathbf{A} = \hbar c/e\,.\,\boldsymbol{\kappa}, \qquad \mathrm{A}_0 = -\hbar/e\,.\,\kappa_0. \tag{6}$$

حرکت می‌کند، صدق می‌کند. به این ترتیب، چون ψ_1 تنها یک تابعِ موجِ معمولی با فازِ معین است، نظریه‌ی ما به نظریه‌ی معمولیِ حرکتِ یک الکترون در یک میدانِ مغناطیسی تبدیل می‌شود. این به انتگرال‌ناپذیریِ فازِ ما یک معنیِ فیزیکی می‌دهد. می‌بینیم که تابعِ موجِ ψ همواره، در حضور یا در غیابِ میدان، باید در معادله‌ی موجِ یکسانی صدق کند، و همه‌ی تأثیرِ میدان، وقتی وجود دارد، آن است که فاز را انتگرال‌ناپذیر می‌کند.

مؤلفه‌های شش‌بردارِ $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{\kappa}$ در (4)، جدا از ضرایبِ عددی، برابرند با مؤلفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$. این دو در نمادگذاریِ برداریِ سه بُعدی، عبارتند از

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{\kappa} = \frac{e}{\hbar c}\, \mathbf{H}, \qquad \operatorname{grad} \kappa_0 - \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial t} = \frac{e}{\hbar}\, \mathbf{E}. \tag{7}$$

ارتباطِ بینِ انتگرال‌ناپذیریِ فاز و میدانِ الکترومغناطیسیِ داده شده در این بخش جدید نیست، بلکه اساساً همان اصلِ ناوردایی پیمانه‌ایِ وایل به شکلِ جدیدش است *. این در کارِ ایوانِنکو و فوک †هم، که نوعِ کلی‌تری از انتگرال‌ناپذیری را بر پایه‌ی یک نظریه‌ی عمومیِ انتقالِ موازیِ نیم‌بردارها بررسی کرده‌اند، هست. روشِ حاضر به منظورِ تأکید بر این موضوع ارائه شده است که فازهای انتگرال‌ناپذیر کاملاً با همه‌ی اصولِ عامِ مکانیکِ کوانتومی سازگار است و به هیچ وجه تعابیرِ فیزیکیِ آن را محدود نمی‌کند.

§3. تکینگی‌های گرهی.

در بخشِ قبل دیدیم چگونه مشتقاتِ انتگرال‌ناپذیر از فازِ تابعِ موج، κ، بر حسبِ پتانسیل‌های میدانِ الکتریکی، تعبیرِ طبیعی می‌یابند، که در نتیجه نظریه‌ی ما از لحاظِ ریاضی با نظریه‌ی معمولیِ حرکتِ یک الکترون در یک میدانِ الکترومغناطیسی معادل می‌شود و هیچ چیزِ تازه‌ای به ما نمی‌دهد. اما، یک واقعیتِ دیگر هست که اکنون باید به حساب آوریم، این واقعیت که فاز همواره به اندازه‌ی یک انتگرالِ دلخواه ضرب‌در 2π، نامعین است. این نیاز به بازنگری در رابطه‌ی بینِ κـ‌ها و پتانسیل‌ها دارد و به یک پدیده‌ی فیزیکیِ تازه منتهی می‌شود.

شرطِ تعبیرِ فیزیکیِ بدونِ ابهام از نظریه آن بود که تغییرِ فاز حولِ یک خمِ بسته برای همه‌ی توابعِ موج یکی باشد. بعد این تغییر را با کمکِ معادلاتِ (4) و (7) (صرفِ نظر از ضرایبِ عددی) مساویِ شارِ کلِ شش‌بردارِ $\mathbf{E}, \mathbf{H}$، که میدانِ الکترومغناطیسی را توصیف می‌کند، از درونِ خمِ بسته تعبیر کردیم. واضح است که اکنون باید این شرایط را کنار بگذاریم. تغییرِ فاز حولِ یک خمِ بسته برای توابعِ موجِ مختلف ممکن است به اندازه‌ی ضرایبِ دلخواهی از 2π با یکدیگر فرق کنند، و به این ترتیب آن قدر معین نیستند که بشود بلافاصله آن‌ها را بر حسبِ میدانِ الکترومغناطیسی تعبیر کرد.

برای پاسخ به این پرسش، بیایید اول یک خمِ بسته‌ی خیلی کوچک را بررسی کنیم. معادله‌ی موج لازم می‌دارد که تابعِ موج پیوسته باشد (جز در رخ‌دادهای خیلی خاصی که می‌شود در این جا نادیده‌شان گرفت) و بنابراین تغییرِ فاز حولِ یک خمِ خیلی کوچک باید کوچک باشد. پس حالا این تغییر نمی‌تواند برای توابعِ موجِ مختلف به اندازه‌ی ضرایبِ 2π فرق کند. باید یک مقدارِ معین داشته باشد و بنابراین باید بتوان آن را

---

* H. Weyl, 'Z. Physik,' vol. 56, p. 330 (1929)

† D. Iwanenko and V. Fock, 'C. R.,' vol. 188, p. 1470 (1929); V. Fock, 'Z. Physik,' vol. 57, p. 261 (1929)

به نظر نمی‌رسد شکلِ کلی‌ترِ انتگرال‌ناپذیری که توسطِ این نویسندگان در نظر گرفته شده است، کاربردِ فیزیکی داشته باشد.

بدونِ ابهام بر حسبِ شارِ شش‌بردارِ $\mathbf{E},\ \mathbf{H}$ گذرنده از خمِ بسته‌ی کوچک بیان کرد، که شار هم باید کوچک باشد.

اما، یک حالتِ استثنایی هست، که وقتی رخ می‌دهد که تابعِ موج صفر می‌شود، زیرا در این صورت فازِ آن معنی ندارد. چون تابعِ موج مختلط است، صفر شدنِ آن دو شرط دارد، پس در حالتِ کلی، نقاطی که در آن تابعِ موج صفر می‌شود روی یک خط قرار می‌گیرند *. ما چنین خطی را یک *خطِ گرهی* می‌نامیم. اکنون اگر تابعِ موجی را در نظر بگیریم که خطِ گرهیِ آن از درونِ خمِ بسته‌ی کوچکِ ما عبور می‌کند، دیگر ملاحظاتِ پیوستگی به این نتیجه که تغییرِ فاز حولِ یک خمِ بسته‌ی کوچک باید کوچک باشد نمی‌انجامد. کلِ چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که تغییرِ فاز باید به $2\pi n$ نزدیک باشد، که n یک عددِ صحیحِ مثبت یا منفی است. این عددِ صحیح مشخصه‌ی خطِ گرهی است. علامتِ آن نشان‌دهنده‌ی جهتِ گردش به دورِ خطِ گرهی است، که به نوبه‌ی خود متناظر با یک جهتِ خاص در امتدادِ خطِ گرهی می‌باشد.

اکنون تفاوتِ بینِ تغییرِ فاز حولِ خمِ بسته‌ی کوچک و نزدیک‌ترین $2\pi n$ باید با تغییرِ فاز حولِ خمِ بسته برای یک تابعِ موج بدونِ خطِ گرهی از میانِ آن برابر باشد. پس این اختلاف است که باید بر حسبِ شارِ شش‌بردارِ $\mathbf{E},\mathbf{H}$ گذرنده از میانِ خمِ بسته، تعبیر شود. برای یک خمِ بسته در فضای سه بعدی، تنها شارِ مغناطیسی وارد می‌شود و بنابراین تغییرِ فاز حولِ خمِ بسته‌ی کوچک را به صورتِ

$$2\pi n + e/\hbar c\,.\int(\mathbf{H},\mathbf{dS}).$$

به دست می‌آوریم.

اکنون می‌توانیم خمِ بزرگِ بسته را با تقسیم به یک شبکه از خم‌های بسته‌ی کوچکِ واقع بر رویه‌ای که خمِ بزرگِ بسته مرزِ آن است، بررسی کنیم. تغییرِ فازِ کل روی خمِ بزرگِ بسته برابر است با مجموعِ همه‌ی تغییرِ فازها روی خم‌های بسته‌ی کوچک و بنابراین برابر است با

$$2\pi\Sigma n + e/\hbar c\,.\int(\mathbf{H},\mathbf{dS}), \tag{8}$$

که انتگرال روی سطح است و جمع روی همه‌ی خطوطِ گرهی است که از میانِ آن سطح می‌گذرند، با اعمالِ علامتِ مناسبِ هر جمله‌ی جمع. این عبارت دو قسمت دارد، یک بخشِ $e/\hbar c.\int(\mathbf{H},\mathbf{dS})$ که باید برای همه‌ی توابعِ موج یکسان باشد و یک قسمتِ $2\pi\sum n$ که ممکن است برای توابعِ موجِ مختلف فرق کند.

*در این جا برای سادگی فرض می‌کنیم که تابعِ موج در سه بعد است. رفتن به چهار بعد تغییرِ اساسی در نظریه ایجاد نمی‌کند. در این صورت خطوطِ گرهی به سطوحِ دوبعدیِ گرهی تبدیل می‌شوند، که به همان طریقِ خطوط در سه بعد توسطِ منحنی‌ها محصور می‌شوند.

عبارتِ (8) روی هر سطحی برابر است با تغییرِ فاز روی مرزِ سطح. پس عبارتِ (8) روی یک سطحِ بسته باید صفر شود. در نتیجه $\sum n$، که روی همه‌ی خطوطِ گرهیِ گذرنده از یک سطحِ بسته جمع بسته می‌شود، باید برای همه‌ی توابعِ موج یکسان باشد و باید مساویِ حاصلِ ضربِ $-e/2\pi\hbar c$ در شارِ مغناطیسیِ کلِ گذرنده از سطح باشد.

اگر $\sum n$ صفر نشود، نقاطِ پایانیِ بعضی از خطوطِ گرهی باید درونِ سطحِ بسته باشد، چون یک خطِ گرهی بدونِ چنین نقطه‌ی انتهایی باید (حداقل) دو بار از سطح [بسته] بگذرد و در دو نقطه‌ی عبوری دو سهمِ مساوی و مختلف‌العلامه در $\sum n$ دارد. به این ترتیب مقدارِ $\sum n$ برای سطحِ بسته برابر است با مجموعِ مقادیرِ n برای همه‌ی خطوطِ گرهی، که نقاطِ انتهایی‌شان درونِ سطح است. این جمع باید برای همه‌ی توابعِ موج یکی باشد. چون این نتیجه برای هر سطحِ بسته درست است، نتیجه می‌گیریم که *نقاطِ پایانیِ خطوطِ گرهی باید برای همه‌ی توابعِ موج یکسان باشند. پس این نقاطِ پایانی، نقاطِ تکینه‌ی میدانِ الکترومغناطیسی هستند.* شارِ کلِ میدانِ مغناطیسیِ گذرنده از یک سطحِ بسته‌ی کوچک که یکی از این نقاط را در بر می‌گیرد برابر است با

$$4\pi\mu = 2\pi n\hbar c/e,$$

که n مشخصه‌ی خطِ گرهی است، یا وقتی بیش از یک خطِ گرهی وجود دارد، مجموعِ مشخصه‌های همه‌ی خطوطِ گرهی است که به آن منتهی می‌شود. پس در آن نقطه‌ی پایانی یک قطبِ مغناطیسی به قدرتِ

$$\mu = \frac{1}{2}n\hbar c/e,$$

وجود دارد.

پس نظریه‌ی ما قطب‌های مغناطیسی را مجاز می‌داند، ولی شدتِ چنین قطب‌هایی باید کوانتیده باشد، که کوانتومِ μ_0 با رابطه‌ی

$$\hbar c/e\mu_0 = 2. \tag{9}$$

به بارِ الکتریکیِ e مربوط است. این معادله باید با (1) مقایسه شود. نظریه هم‌چنین مستلزمِ کوانتشِ بارِ الکتریکی است، زیرا بارِ هر ذره‌ی باردارِ متحرکی در میدانِ یک قطب با شدتِ μ_0 باید مضربِ صحیحی (مثبت یا منفی) از e باشد، تا معادلاتِ موجِ توصیف‌کننده‌ی حرکت ممکن شوند.

§ 4. الکترون در میدانِ یک واحدِ قطب.

توابعِ موجِ بحث‌شده در بخشِ قبل، که خطوطِ گرهیِ آن‌ها به قطب‌های مغناطیسی منتهی می‌شوند، کاملاً مناسب بوده و می‌توان آن‌ها را با روشهایی نظیرِ روش‌های متداول در مکانیکِ کوانتومی بررسی کرد. بررسیِ دقیق‌ترِ یک مثالِ ساده ممکن است به خواننده در فهمِ این موضوع کمک کند.

بیایید حرکتِ یک الکترون را در میدانِ مغناطیسیِ یک قطبِ واحد در غیابِ میدانِ الکتریکی بررسی کنیم. مختصاتِ قطبیِ r، θ، ϕ را با انتخابِ قطبِ مغناطیسی در مبداء اختیار می‌کنیم. اکنون هر تابعِ موج باید یک خطِ گرهی داشته باشد که از مبداء خارج می‌شود.

تابعِ موجِ ψ را به شکلِ (3) می‌نویسیم، که β یک فازِ انتگرال‌ناپذیر با مشتقاتِ κ است که رابطه‌شان با میدانِ الکترومغناطیسیِ شناخته‌شده، با معادلاتِ (6) داده می‌شود. اما، امکان ندارد κـهایی بیابیم که در همه‌ی پیرامونِ قطبِ مغناطیسی این معادلات را برآورده کنند. باید یک خطِ تکینه‌ی خارج‌شونده از قطب وجود داشته باشد که این معادلات روی آن برقرار نباشند، اما این خط را می‌توان به دل‌خواه برگزید. می‌توانیم آن را همان خطِ گرهیِ تابعِ موجِ موردِ بررسی انتخاب کنیم، که به پیوستگیِ ψ_1 منجر می‌شود. اما، این انتخاب به معنیِ κـهای مختلف برای توابعِ موجِ گوناگون است (البته، اختلافِ بینِ هر دو κ، به جز روی خطوطِ تکینه، با گرادیانِ چهاربعدیِ یک نرده‌ای برابر است). این انتخاب احتمالاً نامناسب است و واقعاً لازم نیست. می‌توانیم همه‌ی تابعِ موج‌هایمان را به شکلِ (13) با $e^{i\beta}$ـی یکسان بیان کنیم، و در این صورت توابعِ موجی که خطوطِ گرهی‌شان با خطِ تکینه‌ی κـها برخورد نمی‌کند، مربوط به ψ_1ـهایی خواهند بود که روی این خطِ تکین یک جورِ خاصی ناپیوسته‌اند، به این ترتیب که ناپیوستگی دقیقاً با ناپیوستگیِ $e^{i\beta}$ در این‌جا حذف می‌شود تا حاصلِ ضربِ آن دو پیوسته شود.

میدانِ مغناطیسیِ $\mathbf{H}$، در جهتِ شعاعی است و بزرگی‌اش μ_0/r^2 است، که طبقِ (9) با $\frac{1}{2}\hbar c/er^2$ برابر است. بنابراین، از معادلاتِ (7)، کرلِ $\boldsymbol{\kappa}$ شعاعی و دارای بزرگیِ $1/2r^2$ است. اکنون به سادگی می‌توان ثابت کرد که یک جوابِ معادلاتِ (7) عبارت است از

$$\kappa_0 = 0, \qquad \kappa_r = \kappa_\theta = 0, \qquad \kappa_\phi = 1/2r \ . \tan\frac{1}{2}\theta, \tag{10}$$

که κ_r، κ_θ، κ_ϕ مؤلفه‌های $\boldsymbol{\kappa}$ در مختصاتِ قطبی هستند. این حل در همه‌ی نقاط معتبر است مگر در امتدادِ خطِ $\theta = \pi$، که روی آن بی‌نهایت‌شدگیِ κ_ϕ به گونه‌ای است که $\int(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{dS})$ حولِ یک خمِ کوچکِ دربرگیرنده‌ی این خط برابرِ 2π است. می‌توانیم همه‌ی توابعِ موجمان را نسبت به این مجموعه κـها بنویسیم.

بیایید یک حالتِ ایستای الکترون با انرژیِ W را در نظر بگیریم. معادله‌ی موجِ غیرِ نسبیتی به صورتِ زیر نوشته می‌شود،

$$-\hbar^2/2m\ .\nabla^2\psi = \mathrm{W}\psi.$$

اگر قانونِ بیان‌شده در معادله‌ی(5) را به کار بریم، معادله‌ی موجِ ψ_1 را به صورتِ

$$-\hbar^2/2m\ .\Big\{\nabla^2 + i(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\nabla}) + i(\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{\kappa}) - \boldsymbol{\kappa}^2\Big\}\psi_1 = \mathrm{W}\psi_1 \tag{11}$$

به دست می‌آوریم. مقادیرِ (10) برای κـ‌ها، به

$$(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\nabla}) = (\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{\kappa}) = \kappa_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{1}{4r^2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}$$

و

$$\boldsymbol{\kappa}^2 = \kappa_\phi^2 = \frac{1}{4r^2}\tan^2\frac{1}{2}\theta$$

منجر می‌شود، به طوری که معادله‌ی (11) تبدیل می‌شود به

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big\{\nabla^2 + \frac{i}{2r^2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{4r^2}\tan^2\frac{1}{2}\theta\Big\}\psi_1 = \mathrm{W}\psi_1.$$

اکنون می‌توانیم ψ_1 را به شکلِ حاصلِ ضربِ f، که تابعی از فقط r است، در S، که تابعی از فقط θ و ϕ است، فرض کنیم؛ یعنی،

$$\psi_1 = f(r)\,\mathrm{S}(\theta\phi).$$

این لازم می‌دارد که

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r^2}\Big\}f = -\frac{2m\mathrm{W}}{\hbar^2}\ f, \tag{12}$$

$$\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{2}i\ \sec^2\frac{1}{2}\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{4}\tan^2\frac{1}{2}\theta\Big\}\,\mathrm{S} = -\lambda\mathrm{S}, \tag{13}$$

که λ یک عدد است.

از معادله‌ی (12) واضح است که هیچ حالتِ پایداری وجود ندارد که در آن الکترون مقید به قطبِ مغناطیسی باشد، زیرا عملگرِ سمتِ چپ دارای هیچ ثابتی با بعدِ طول نیست. این نتیجه‌ای است که از

مشباهت با نظریه‌ی کلاسیکی انتظار داریم. معادله‌ی (13) بستگیِ تابعِ موج به زاویه را تعیین می‌کند. آن را می‌توان تعمیمی از معادله‌ی معمولیِ هماهنگ‌های کروی به حساب آورد.

پایین‌ترین ویژه‌مقدارِ (13) برابرِ $\lambda = \frac{1}{2}$است، که متناظر است با دو تابعِ موجِ مستقلِ

$$\mathrm{S}_a = \cos\frac{1}{2}\theta, \qquad \mathrm{S}_b = \sin\frac{1}{2}\theta\ e^{i\phi},$$

که به سادگی با جاگذاریِ مستقیم قابلِ اثبات است. برای S_a خطِ گرهی $\theta = \pi$ و برای S_b، $\theta = 0$ است. باید توجه شود که S_a همه جا پیوسته است، در حالی که S_b در $\theta = \pi$ ناپیوسته است، فازِ آن پس از یک دور روی خمِ کوچکی که خطِ $\theta = \pi$ را دور می‌زند، به اندازه‌ی 2π تغییر می‌کند. این دقیقاً چیزی است که لازم است تا هر دوی S_a و S_b پس از ضرب شدن در $e^{i\beta}$، توابعِ موجِ پیوسته‌ی ψ را بدهند. دو تا ψ ای که به این ترتیب به دست می‌آوریم، مثلِ هم‌اند و تفاوتِ رفتارِ S_a و S_b به این خاطر است که κـ‌هایی را انتخاب کردیم که در $\theta = \pi$ یک تکینه‌اند.

ویژه مقدارِ عمومیِ (13) $\lambda = n^2 + 2n + \frac{1}{2}$ است. جوابِ عمومیِ این تابعِ موج توسطِ آی. تَم [I. Tamm] بررسی شده است *.

§ 5. *نتیجه‌گیری.*

نظریه‌ی کلاسیکیِ ابتدایی به ما اجازه می‌دهد که معادلاتِ حرکتِ یک الکترون در میدانِ حاصل از یک توزیعِ دلخواهِ بارهای الکتریکی و قطب‌های مغناطیسی را فرمول‌بندی کنیم. اما اگر بخواهیم معادلاتِ حرکت را به شکلِ هامیلتونی بنویسیم، باید پتانسیل‌های الکترومغناطیسی را معرفی کنیم، و این فقط وقتی ممکن است که هیچ قطبِ مغناطیسیِ منفردی وجود نداشته باشد. مکانیکِ کوانتومی، طوری که معمولاً تثبیت شده، از شکلِ هامیلتونیِ نظریه‌ی کلاسیکی به دست می‌آید و بنابراین فقط وقتی قابلِ استفاده است که هیچ تک‌قطبیِ مغناطیسی وجود نداشته باشد.

موضوعِ مقاله‌ی حاضر نشان دادنِ این موضوع است که مکانیکِ کوانتومی واقعاً وجودِ تک‌قطبی‌های مغناطیسی را رد نمی‌کند. برعکس، فرمول‌بندیِ فعلیِ مکانیکِ کوانتومی، وقتی بدونِ اعمالِ محدودیت‌های دلخواه، به طورِ طبیعی بسط داده شود، حتماً به معادلاتِ موجی منجر می‌شود که تنها تعبیرِ فیزیکیِ آن‌ها حرکتِ یک الکترون در میدانِ یک قطبِ تنها است. این پیشرفتِ جدید، وقتی بر حسبِ نمادهای انتزاعیِ مربوط به حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها بیان می‌شود، به هیچ *نوع تغییری* در فرمالیسم نیاز ندارد، بلکه تنها تعمیمی

*احتمالاً در 'Z. Physik' چاپ می‌شود.

است از این امکان که این نمادهای مجرد را با توابعِ موج و ماتریس‌ها نمایش می‌دهیم. با این وصف، اگر طبیعت از آن استفاده نکرده بود باید تعجب می‌کردیم.

نظریه به رابطه‌ای بینِ واحدِ قطبِ مغناطیسی و واحدِ بارِ الکتریکی، یعنی معادله‌ی (9)، منجر می‌شود. نسبتاً مأیوس‌کننده است که به جای یک شرطِ کوانتومیِ الکترونیکی، شبیهِ (1)، این رابطه‌ی دو طرفه را بینِ الکتریسیته و مغناطیس می‌یابیم. اما، به نظر می‌رسد که هیچ راهی برای اصلاحِ نظریه وجود ندارد، زیرا هیچ خصوصیتِ دلخواهی ندارد، پس احتمالاً توضیحِ (1) نیاز به یک ایده‌ی کاملاً جدید دارد.

دوجانبگیِ نظریِ بینِ الکتریسیته و مغناطیس کامل است. به جای بررسیِ حرکتِ یک الکترون در میدانِ یک قطبِ مغناطیسیِ ثابت، مثلِ کاری که در §4 انجام دادیم، به طورِ معادل می‌توانستیم حرکتِ یک قطب را در میدانِ یک بارِ ثابت بررسی کنیم. این نیاز به معرفیِ پتانسیل‌های الکترومغناطیسیِ B دارد که در

$$\mathbf{E} = \operatorname{curl} \mathbf{B}, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathrm{B}_0,$$

صدق کنند، و باید به جای A‌ـ‌ها در معادله‌ی (6) به کار روند. اکنون نظریه به طورِ کاملاً موازی پیش می‌رود و به همان شرطِ (9) بینِ کوچک‌ترین قطب و کوچک‌ترین بار منجر می‌شود.

این سؤال باقی است که چرا تک‌قطبی‌های مغناطیسی مشاهده نشده‌اند. نتیجه‌ی تجربیِ (1) نشان می‌دهد که باید دلیلی برای عدمِ شباهتِ بینِ الکتریسیته و مغناطیس باشد (که شاید به علتِ تفاوتِ الکترون و پروتون مربوط باشد) که در نتیجه‌ی آن ما، نه $\mu_0 = e$، بلکه $\mu_0 = 137/2$. e را داریم. این بدان معنی است که نیروی جاذبه بینِ دو واحدِ تک‌قطبی با علامت‌های مخالفِ $(137/2)^2 = 4692\frac{1}{4}$ برابر بزرگ‌تر از نیروی جاذبه بینِ الکترون و پروتون است. شاید این نیروی بسیار بزرگ علتِ این است که چرا قطب‌های مخالف تا کنون از هم جدا نشده‌اند.